$$\int\limits_{\text{5 ноября 2018}}^{\text{16 ноября 2018}} \left(\begin{array}{c} \text{Московские сборы} \\ \text{секция математики} \end{array} \right) \mathrm{d}t$$

Немного о структуре

Материалы разбиты по группам, в пределах каждой группы отсортированы по темам:

- алгебра;
- геометрия;
- комбинаторика;
- тренировочные олимпиады;

Материалы, общие для нескольких групп, дублируются. Все материалы сопровождаются ссылками на исходные файлы LaTeX.

Немного об авторах

Материалы занятий Александра Васильевича Шаповалова можно найти на его сайте: www.ashap.info/Uroki/Mosbory/2018o

source:_integral.tex

Оглавление

Глава 1

Ласточки (9-1)

Многочлены с целыми коэффициентами

1. Докажите, что многочлен $f(x) = x^{p-1} + x^{p-2} + x^{p-3} + \ldots + 1$ при простом p не раскладывается в произведение многочленов меньшей степени с целыми коэффициентами.

2. Докажите, что многочлен $(x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_n) - 1$ не раскладывается в произведение многочленов меньшей степени с целыми коэффициентами, если a_1, a_2, ..., a_n — различные целые числа.

3. Пусть $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ — многочлен с целыми коэффициентами, причём существует такое простое p, что $p \mid a_0, a_1, \ldots, a_k$, $p \nmid a_{k+1}$, $p^2 \nmid a_0$. Тогда любое разложение многочлена $P(x)$ на множители содержит многочлен степени больше k.

4. Трёхчлен с целыми коэффициентами $ax^2 + bx + c$ при всех целых x является точной четвёртой степенью. Докажите, что тогда $a = b = 0$.

5. Трёхчлен $ax^2 + bx + c$ при всех целых x является точным квадратом. Докажите, что этот многочлен является степенью линейного двучлена с целыми коэффициентами.

6. Докажите, что не существует многочлена (степени больше нуля) с целыми коэффициентами, принимающего при каждом натуральном значении аргумента значение, равное некоторому простому числу.

7. Придумайте многочлен с целыми коэффициентами, корнем которого является число $\sqrt[5]{2 + \sqrt{3}} + \sqrt[5]{2 - \sqrt{3}}$.

source:algebra/polynomial/integer-g9r1/1.tex

Многочлены: дополнительные задачи

1. Докажите, что многочлен $f(x) = x^n + 5x^{n-1} + 3$ неприводим над $\mathbb{Z}$.

2. Пусть m, n, a — натуральные числа и p — простое, $p < a - 1$. Докажите, что многочлен $f(x) = x^m(x-a)^n + p$ неприводим над $\mathbb{Z}$.

3. Многочлен $P(x)$ обладает следующим свойством: для любого $y \in \mathbb{Q}$ существует $x \in \mathbb{Q}$ такой, что $P(x) = y$. Докажите, что многочлен $P(x)$ линейный.

source:algebra/polynomial/integer-g9r1/2-more.tex

Разностное дифференцирование многочлена и последовательности

Для любого многочлена $f(x)$ его разностными производными называются многочлены

$$(\Delta f)(x) = f(x+1) - f(x), \quad (\Delta^2 f)(x) = (\Delta(\Delta f))(x), \quad \ldots$$

1. Пусть $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$. Найдите $(\Delta^n f)(x)$.

2. Существует ли многочлен с целыми коэффициентами степени n, которых во всех точках $i = 0, 1, 2, \ldots, n+1$ принимает значения 3^i?

3. Существует ли многочлен с целыми коэффициентами степени n, которых во всех точках $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ принимает значения 3^i? Если существует, представьте его в разумном виде.

Подсказка: сначала сделайте то же самое для значений 2^i.

4. Приведенный многочлен степени n во всех целых точках принимает значение, кратное натуральному числу m. Докажите, что $n!$ делится на m.

5. Докажите, что для любого многочлена $g(x)$ степени n существует единственный многочлен $f(x)$ с нулевым свободным членом, такой, что $(\Delta f)(x) = g(x)$.

6. Придумайте разумный вывод формулы суммы n первых кубов, не использующий готовый ответ.

7. Докажите, что любое целое число можно представить в виде суммы нескольких различных точных кубов.

8. Существует ли квадратный трёхчлен с целыми коэффициентами, значения которого при всех натуральных значениях аргумента есть степени двойки?

source:algebra/polynomial/integer-g9r1/3-finite-difference.tex

Многочлены, последовательности и рекуррентные соотношения

1. Пусть $T_k(n)$ есть сумма всех произведений по k чисел от 1 до n.

(a) Докажите, что $T_2(n)$ есть многочлен.

(b) Докажите, что $T_k(n)$ является многочленом от n при произвольном k.

2. Докажите, что при любых натуральных n, m выражение

$$\frac{(x^{n+1}-1)(x^{n+2}-1)\dots(x^{n+m}-1)}{(x-1)(x^2-1)\dots(x^m-1)}$$

является многочленом (так называемые *многочлены Гаусса*).

3. Дана последовательность a_n. Разрешается получать новые последовательности по следующим правилам: отбрасывать несколько первых членов; почленно складывать, вычитать, умножать и делить (если ни один из членов стоящей в знаменателе последовательность никогда не обращается в ноль) любые две имеющиеся последовательности. Можно ли, действуя таким образом много раз, получить натуральный ряд (полностью), если изначально имеется ряд квадратов?

4. Тот же вопрос, но изначально имеется последовательность $a_n = n + \sqrt{2}$.

5. Последовательность $a_0, a_1, a_2, \dots$ задана условиями $a_0 = 0$, $a_{n+1} = P(a_n)\,(n \geqslant 0)$, где $P(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами, $P(x) > 0$ при $x \geqslant 0$. Докажите, что наибольший общий делитель любых двух членов этой последовательности принадлежит этой последовательности.

6. Дан многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами, причём для каждого натурального x выполняется неравенство $P(x) > x$. Определим последовательность $\{b_n\}$ следующим образом: $b_1 = 1$, $b_{k+1} = P(b_k)$ для $k \geqslant 1$. Известно, что для любого натурального d найдется член последовательности $\{b_n\}$, делящийся на d. Найдите все такие многочлены P.

7. Пусть p и q — различные числа и $p + q = 1$. Упростите следующее выражение так, чтобы исчез знак суммирования:

$$\mathrm{C}_n^0 - \mathrm{C}_n^1 pq + \mathrm{C}_n^2 p^2q^2 - \dots + (-1)^i \mathrm{C}_{n-i}^i p^i q^i + \dots$$

(слагаемые суммируются до тех пор, пока биномиальный коэффициент корректно определён).

source:algebra/polynomial/integer-g9r1/4-sequences.tex

Первый разнобой по ТЧ

1. Преобразуем сумму $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{100}$ в дробь $\frac{m}{n}$. Докажите, что m делится на 101.

2. Докажите, что $2^{n!}-1 \vdots (n^2-1)$ для всех чётных n.

3. Найдите все натуральные n, что $3^n-2^n \vdots n$.

4. Найдите все такие натуральные x и простые p, что выполняется $x^8+2^{2^x+2}=p$.

5. Пусть m и n натуральные числа такие, что m^2+n^2+m делится на mn. Докажите, что m — полный квадрат.

6. Докажите, что существует бесконечно много n таких, что уравнение

$$a^2+b^2+1=3^n$$

имеет хотя бы одно решение в натуральных числах.

7. Для каких натуральных n число $(n-1)!+1$ является точной степенью n?

8. Докажите, что для любого простого числа p существует простое число q такое, что для всех целых n число n^p-p не делится на q.

source:algebra/number-theory/mixture-g9/r1.tex

Показательный разнобой по ТЧ

1. Пусть p — простое число, d — один из делителей числа $p-1$. Выберем из остатков $1, 2, \dots, p-1$ те, чей показатель по модулю p равен d. Чему равен остаток произведения всех выбранных чисел по модулю p?

2. Пусть n — чётное число, а натуральные числа a и b взаимно просты. При каких a и b число $\frac{a^n+b^n}{a+b}$ – целое?

3. Пусть n — чётное число. Докажите, что любой делитель n^4+1 дает остаток 1 при делении на 8.

4. Докажите, что для любого натурального числа n существует натуральное число K такое, что сумма цифр K равна n, и K делится на n.

5. При каком наименьшем k существуют натуральные числа x_1, x_2, ..., x_k такие, что
$$x_1^3 + x_2^3 + \ldots + x_k^3 = 2002^{2002}\,?$$

6. Найдите все простые p и q, для которых $5^p + 5^q$ делится на pq.

7. Задана последовательность $a_n = b^{n+1} + b^n - 1$, где $b \in \mathbb{N}$, $n = 1, 2, 3, \dots$. Всегда ли из неё можно выбрать 2018 попарно взаимно простых чисел?

source:algebra/number-theory/exponent-g9/r1.tex

Добавка (теория чисел)

1. Найдите все тройки простых p, q, r таких, что $p \mid q^r + 1,\ \ q \mid r^p + 1,\ \ r \mid p^q + 1$.
2. Пусть F_n — n-е число Фибоначчи. Докажите, что $F_p^2 - 1 \,\vdots\, p$ для всех простых $p > 5$.
3. Пусть $S = \{y^2 - x^3 - 1 \mid 0 \leqslant x, y \leqslant p-1\}$, где $p > 2$ — простое число вида $3k+2$. Докажите, что в множестве S есть хотя бы p элементов кратных p.
4. Найдите все натуральные $n > 1$ такие, что $2^n + 1 \,\vdots\, n^2$.

source:algebra/number-theory/mixture-g9r1-more.tex

Конструктивный разнобой

1. Существуют ли 2018 натуральных чисел, образующих арифметическую прогрессию, таких, что каждое имеет вид a^b, где a, b — натуральные и $b > 1$?

2. Даны натуральные числа k и n. Артём пишет на блокноте числа n, n^n, n^{n^n}, $n^{n^{n^n}}$ и так далее (каждое новое число получается возведением числа n в степень предыдущего числа). Докажите, что рано или поздно остатки при делении на k у чисел Артёма будут одни и те же.

3. Существуют ли 100 натуральных чисел таких, что НОД любых двух из них равен их разности?

4. Задана последовательность $a_n = 2^n - 3$, где $n = 1, 2, 3, \ldots$. Можно ли выбрать из неё 2018 попарно взаимно простых чисел?

5. Найдите наименьший простой делитель числа $12^{2^{15}} + 1$.

6. Существует ли натуральное N такое, что у него ровно 2000 простых делителей и $2^N + 1$ делится на N?

7. Пусть $k = 2^{2^n} + 1$ для некоторого натурального n. Докажите, что k является простым тогда и только тогда, когда k — делитель числа $3^{\frac{k-1}{2}} + 1$.

source:algebra/number-theory/mixture-g9r1-constructive.tex

Вступительный разнобой

1. Дана точка A и окружность ω, не проходящая через A. Докажите, что

(a) все окружности, проходящие через точку A и пересекающие окружность ω в диаметрально противоположных точках, проходят одновременно через некоторую точку A', отличную от A;

(b) все окружности, проходящие через точку A и перпендикулярные к окружности ω, проходят одновременно через некоторую точку A', отличную от A. (Окружности называются перпендикулярными, если касательные, проведенные к ним в точке пересечения, перпендикулярны.)

2. В параллелограмме $ABCD$ дана точка M, такая что $\angle MAD = \angle MCD$. Докажите, что $\angle MBA = \angle MDA$.

3. Внутри окружности зафиксирована точка A, а на окружности взяты произвольные точки B и C так, что $\angle BAC = 90°$. Найдите геометрическое место середин хорд BC.

4. На сторонах AB, BC и CA треугольника ABC взяты точки P, Q и R соответственно. Докажите, что центры описанных окружностей треугольников APR, BPQ и CQR образуют треугольник, подобный треугольнику ABC.

5. Медиана AM треугольника ABC пересекает вписанную в него окружность в точках X и Y. Известно, что $AB = AC + AM$. Найдите $\angle XIY$, где I — центр вписанной окружности.

6. В остроугольном треугольнике ABC точки O и I — центры описанной и вписанной окружностей соответственно. При этом $\angle OIA = 30°$. Докажите, что один из углов B и C равен $60°$.

7. На отрезке MN построены подобные, одинаково ориентированные треугольники AMN, NBM и MNC. Докажите, что треугольник ABC подобен всем этим треугольникам, а центр его описанной окружности равноудален от точек M и N.

8. Окружность, проходящая через вершины A и B треугольника ABC, пересекает сторону BC в точке D. Окружность, проходящая через вершины B и C, пересекает сторону AB в точке E и первую окружность вторично в точке F. Оказалось, что точки A, E, D, C лежат на окружности с центром O. Докажите, что угол BFO — прямой.

`source:geometry/mixture-g9-intro.tex`

Инверсия

1. **(a)** Пусть при инверсии с центром O точка A переходит в A', а точка B переходит в B'. Докажите, что треугольники OAB и $OB'A'$ подобны.
(b) Докажите, что при инверсии с центром O прямая ℓ, не проходящая через O, переходит в окружность, проходящую через O, а окружность, проходящая через O, переходит в прямую, не проходящую через O.
(c) Докажите, что при инверсии с центром O окружность, не проходящая через O, переходит в окружность, не проходящую через O.

2. **(a)** Докажите, что при инверсии касающиеся окружности (прямая и окружность) переходят в касающиеся окружности, или в касающиеся окружность и прямую, или в пару параллельных прямых.
(b) Докажите, что при инверсии сохраняется угол между окружностями (между окружностью и прямой, между прямыми).

3. Точки A и B лежат на окружности ω. Касательные к окружности, проходящие через точки A и B, пересекаются в точке P. Докажите, что P является образом середины хорды AB при инверсии относительно ω.

4. **(a)** Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность, $AB \cdot CD = AD \cdot BC$. При инверсии с центром в точке A и радиусом 1 точка B переходит в B', C — в C' и D — в D'. Докажите, что $B'C' = C'D'$.
(b) Докажите с помощью инверсии теорему Птолемея.

5. Окружности Γ_1 и Γ_3 касаются внешним образом в точке P, и окружности Γ_2 и Γ_4 тоже касаются внешним образом в точке P. При этом окружности Γ_1 и Γ_2 повторно пересекаются в точке A, Γ_2 и Γ_3 — в точке B, Γ_3 и Γ_4 — в точке C, Γ_4 и Γ_1 — в точке D. Докажите, что
$$\frac{AB \cdot BC}{CD \cdot DA} = \frac{PB^2}{PD^2}\,.$$

6. Пусть P — точка внутри треугольника ABC такая, что
$$\angle APB - \angle ACB = \angle APC - \angle ABC\,.$$
Пусть точки D и E — центры вписанных окружностей треугольников APB и APC соответственно. Докажите, что прямые AP, BD и CE пересекаются в одной точке.

7. Окружность с центром O проходит через вершины A и C треугольника ABC и пересекает стороны AB и BC повторно в точках K и N соответственно. Пусть M — точка пересечения описанных окружностей треугольников ABC и KBN (отличная от B). Докажите, что $\angle OMB = 90^\circ$.

8. Пусть p — полупериметр треугольника ABC. Точки E и F на прямой BC таковы, что $AE = AF = p$. Докажите, что описанная окружность треугольника AEF касается вневписанной окружности треугольника ABC со стороны BC.

9. Из точки K проведены касательные KN и KL к окружности ω. На луче KN за точкой N выбрана точка M. Описанная окружность треугольника KLM повторно пересекает окружность ω в точке P, а Q — проекция точки N на ML. Докажите, что $\angle MPQ = 2\angle KML$.

10. Вписанная окружность ω треугольника ABC касается стороны BC в точке K. Прямая, проходящая через K и середину высоты AD, повторно пересекает ω в точке N. Докажите, что описанная окружность треугольника BCN касается ω.

source:geometry/inversion-g9/1-r1.tex

Инверсия еще

1. Через точку A к окружности ω с центром O проведены касательные AX и AY, а также секущая, пересекающая окружность в точках Z и T. Докажите, что точки Z, T, O и середина XY лежат на одной окружности.

2. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и BB_1. Прямая A_1B_1 пересекает описанную окружность треугольника ABC в точках X и Y. Окружность, описанная около треугольника CBB_1, пересекает высоту AA_1 в точке Z. Докажите, что $CX = CY = CZ$.

3. В полуокружность ω, стягиваемую диаметром PQ, вписана окружность, касающаяся диаметра в точке C. Точки A на ω и B на отрезке CQ таковы, что AB касается окружности и $AB \perp PQ$. Докажите, что CA — биссектриса угла BAP.

4. *С помощью инверсии!*
(a) Окружность s_1 касается окружности s внутренним образом в точке N. Хорда AB окружности s касается окружности s_1 в точке M. Докажите, что MN делит дугу AB, не содержащую точку N, пополам.
(b) Окружности s_1 и s_2 касаются окружности s внутренним образом. Хорда AB окружности s является общей внешней касательной окружностей s_1 и s_2. Докажите, что их радикальная ось проходит через середину дуги AB.

5. На прямой ℓ заданы точки A, B и C в указанном порядке. На отрезках AB, BC и CA по одну сторону от прямой ℓ построены полуокружности ω_1, ω_2 и ω соответственно. Окружность γ_1 касается всех трех полуокружностей. Окружности γ_n при $n \geqslant 2$ касаются полуокружностей ω и ω_1 и окружности γ_{n-1}. Найдите отношение расстояния от центра окружности γ_n до прямой ℓ к ее радиусу.

6. Точка I — центр вписанной окружности треугольника ABC. Меньшую из окружностей, проходящих через точку I и касающихся сторон AB и AC, обозначим через ω_A. Аналогично определим ω_B и ω_C. Вторые точки пересечения ω_A и ω_B, ω_B и ω_C, ω_C и ω_A обозначим через C_1, A_1, B_1 соответственно. Докажите, что центры окружностей, описанных около треугольников AA_1I, BB_1I и CC_1I, лежат на одной прямой.

7. В треугольнике ABC проведена биссектриса AD. Точки M и N являются проекциями вершин B и C на AD. Окружность с диаметром MN пересекает BC в точках X и Y. Докажите, что $\angle BAX = \angle CAY$.

8. Точка N — середина дуги BAC описанной около треугольника ABC окружности ω. Касательные в точках A и N к окружности ω пересекаются в точке X. Касательные в точках B и C — в точке Y. Докажите, что прямая XY проходит через основание биссектрисы угла A.

9. Четырёхугольник $ABCD$ описан около окружности с центром I. Касательные к описанной окружности треугольника AIC в точках A, C пересекаются в точке X. Касательные к описанной окружности треугольника BID в точках B, D пересекаются в точке Y. Докажите, что точки X, I, Y лежат на одной прямой.

Предполярный разнобой

1. **(a)** Внутри окружности зафиксирована точка A, а на окружности взяты произвольные точки B и C так, что $\angle BAC = 90°$. Найдите геометрическое место точек пересечения касательных к окружности, проведенных в точках B и C.
(b) Через точку A проводятся всевозможые секущие, пересекающие окружность в точках B и C. Найдите геометрическое место точек пересечения касательных к окружности, проведенных в точках B и C.

2. Стороны AB, BC, CD и DA описанного четырехугольника $ABCD$ касаются вписанной окружности в точках K, L, M и N соответственно. Отрезок KM пересекает диагональ AC в точке X. Докажите, что
(a) $AX/XC = AK/MC$;
(b) диагонали четырехугольников $ABCD$ и $KLMN$ пересекаются в одной точке.

3. Через точку A проводятся всевозможные пары секущих к окружности ω с центром O. Первая пересекает окружность в точках K и L, а вторая — в точках M и N.
(a) Докажите, что всевозможные точки пересечения прямых KM и NL лежат на одной прямой.
(b) Докажите, что построенная таким образом прямая проходит через инверсный образ точки A и перпендикулярна AO.

4. Дана окружность ω с центром O и четыре такие точки A, B, A' и B', что A' и B' соответственно симметричны точкам A и B относительно ω. Через точку A' проведена прямая a, перпендикулярная OA, а через точку B' — прямая b, перпендикулярная OB. Докажите, что если A лежит на b, то B лежит на a.

5. Точки X, Y и Z — точки пересечения противоположных сторон и точка пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$, вписанного в окружность с центром O. Докажите, что O — ортоцентр треугольника XYZ.

6. Окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B. Касательные в точке A к ω_1 и ω_2 повторно пересекают окружности в точках C и D. Точка E такова, что B — середина отрезка AE. Докажите, что точки A, C, D и E лежат на одной окружности.

7. Четыре окружности ω_1, ω_2, ω_3 и ω_4 попарно касаются друг друга внешним образом. Обозначим через A_{ij} точку касания окружностей ω_i и ω_j. Докажите, что прямые $A_{12}A_{34}$, $A_{13}A_{24}$ и $A_{14}A_{23}$ пересекаются в одной точке.

8. Четырехугольник $ABCD$ описан около окружности с центром в точке O. Прямые AB и CD пересекаются в точке P, а прямые AD и BC — в точке Q, причем отрезки BP и DQ пересекаются в точке A; M — основание перпендикуляра, опущенного из точки O на PQ. Докажите, что
(a) точка пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$ лежит на прямой OM;
(b) $\angle BMO = \angle DMO$.

9. Вписанная окружность треугольника ABC с центром I касается стороны AC в точке Q; точка E — середина стороны AC, а K — ортоцентр треугольника BIC. Докажите, что $KQ \perp IE$.

source:geometry/polar-line-g9/1-r1.tex

Поляра или/и инверсия или что-то еще?

1. Окружности ω_1 и ω_2 перпендикулярны. Точки A и B диаметрально противоположны в окружности ω_1. Докажите, что поляра A относительно ω_2 проходит через B.

2. На прямой, содержащей диаметр AB окружности Ω с центром O, за точкой B выбрана точка C. Прямая, проходящая через C, пересекает Ω в точках D и E. Отрезок OF — диаметр окружности ω, описанной около треугольника DOB. Прямая CF пересекает повторно окружность ω в точке G. Докажите, что точки O, A, E и G лежат на одной окружности.

3. Вписанная окружность треугольника ABC с центром I касается сторон AC и AB в точках E и F. Точка J на EF такова, что прямая BJ параллельна AC. Пусть $CJ \cap AB = K$. Докажите, что прямая IK параллельна EF.

4. Вписанная окружность треугольника ABC с центром I касается сторон AC и AB в точках E и F. Прямая ℓ проходит через вершину C и пересекает AB и EF в точках M и N соответственно. Прямая ME пересекает CF в точке J. Докажите, что $AJ \perp IN$.

5. Докажите, что во вписанно-описанном четырехугольнике прямая, соединяющая центры вписанной и описанной окружностей проходит через точку пересечения диагоналей.

6. Диагонали четырехугольника $ABCD$, вписанного в окружность с центром O, различны по длине и пересекаются в точке E. Точка P внутри четырехугольника такова, что

$$\angle PAB + \angle PCB = \angle PBC + \angle PDC = 90^\circ .$$

Докажите, что точки O, P и E коллинеарны.

7. Точки X, Y и Z получены путем отражения центра вписанной окружности I треугольника ABC относительно сторон BC, CA и AB соответственно. Докажите, что AX, BY и CZ пересекаются в одной точке.

8. В неравнобедренном треугольнике ABC угол A равен 60°, I и O — центры вписанной и описанной окружностей. Докажите, что серединный перпендикуляр к отрезку AI и прямые OI и BC пересекаются в одной точке.

9. Вписанная окружность с центром I касается сторон BC, CA и AB треугольника ABC в точках K, L и M соответственно. Прямая, проходящая через B параллельно MK, пересекает прямые LM и LK в точках R и S. Докажите, что $\angle RIS < 90^\circ$.

source:geometry/polar-line-g9/2-r1.tex

Разнобой для тех, кто все решил

1. К двум пересекающимся окружностям ω_1 и ω_2 проведены общие внешние касательные AB и CD так, что $A, C \in \omega_1$ и $B, D \in \omega_2$. Касательные к окружностям, проходящие через середину M отрезка AB и отличные от AB, пересекают прямую CD в точках K и L. Докажите, что центр вписанной окружности треугольника MKL равноудален от точек C и D.

2. Пусть H — ортоцентр остроугольного треугольника ABC, а ω — его окружность девяти точек. На дуге BHC окружности Ω с центром O' выбрана точка X. Отрезок AX пересекает окружность ω в точке Y. Точка P на окружности ω такова, что $PX = PY$. Докажите, что $\angle O'PX = 90°$. (Выберите одно расположение точек, в котором задача верна.)

3. Высоты BE и CF остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. Точка P на EF такова, что $HO \perp HP$ (O — центр описанной окружности треугольника ABC), а точка Q на AH такова, что $HM \perp PQ$ (M — середина BC). Докажите, что $QA = 3QH$.

4. В треугольнике ABC точка M — середина BC. Пусть ω — окружность, лежащая внутри треугольника ABC, касающаяся сторон AB и AC в точках E и F соответственно. Из точки M проведены касательные MP и MQ к ω так, что точки P и B лежат по одну сторону от прямой AM. Пусть $X = PM \cap BF$ и $Y = QM \cap CE$. Докажите, что если $2PM = BC$, то прямая XY касается ω.

5. Вписанная окружность с центром I треугольника ABC касается сторон BC, CA и AB в точках D, E и F. Точка K — основание перпендикуляра из точки D на EF. Докажите, что DK — биссектриса угла IKH, где H — ортоцентр треугольника ABC.

6. Точки P на описанной окружности ω и Q на основании BC равнобедренного треугольника ABC таковы, что $AP = AQ$. При этом прямые AP и BC пересекаются в точке R. Докажите, что касательные из точек B и C к вписанной окружности треугольника AQR, отличные от BC, пересекаются на ω.

7. Треугольник ABC таков, что $\angle ABC < \angle BCA < \angle CAB < 90°$. Точка O — центр его описанной окружности, а точка K симметрична O относительно BC. Точки D и E — основания перпендикуляров из точки K на прямые AB и AC, соответственно. Прямая DE пересекает BC в точке P, а окружность ω с диаметром AK пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке Q, отличной от A. Докажите, что PQ пересекает серединный перпендикуляр к BC в точке на окружности ω.

8. Точка H' симметрична основанию высоты AH треугольника ABC относительно середины стороны BC. Касательные к описанной окружности треугольника ABC в точках B и C пересекаются в точке X. Прямая, проходящая через H' и перпендикулярная XH', пересекает прямые AB и AC в точках Y и Z соответственно. Докажите, что $\angle YXB = \angle ZXC$.

9. Пусть I и H — центр вписанной окружности и ортоцентр треугольника ABC. Точка P на BC такова, что $PI \perp AI$, M — середина AP. Окружность с диаметром IM пересекает вписанную в треугольник ABC окружность в точках U и V. Докажите, что точки U, V и H лежат на одной прямой.

Дальневосточный разнобой

1. Точка A' диаметрально противоположна вершине A на описанной окружности треугольника ABC. На стороне BC во внешнюю сторону построен равносторонний треугольник BCD. Перпендикуляр к $A'D$, проведенный в точке A', пересекает прямые CA и AB в точках E и F соответственно. На отрезке EF построен равнобедренный треугольник ETF с $\angle ETF = 120°$ (точки A и T по разные стороны от EF). Докажите, что AT проходит через центр окружности девяти точек треугольника ABC.

2. Треугольник ABC с инцентром I вписан в окружность Γ. Точка M — середина стороны BC. Точки D, E и F выбраны на сторонах BC, CA и AB соответственно так, что $ID \perp BC$, $IE \perp AI$ и $IF \perp AI$. Предположим, что описанная окружность треугольника AEF повторно пересекает Γ в точке X. Докажите, что прямые XD и AM пересекаются на Γ.

3. В неравнобедренном треугольнике ABC точки D, F, и G — середины сторон AB, AC и BC соответственно. Окружность Γ проходит через C, касается AB в точке D и пересекает AF и BG в точках X и Y соответственно. Точки X' и Y' симметричны точкам X и Y относительно F и G соответственно. Прямая $X'Y'$ пересекает CD и FG в точках Q и M соответственно. Наконец, прямая CM повторно пересекает Γ в точке P. Докажите, что $CQ = QP$.

4. На сторонах AB, BC, CD и DA выпуклого четырехугольника $ABCD$ выбраны точки P, Q, R и S соответственно. Отрезки PR и QS пересекаются в точке O. Предположим, что четырехугольники $APOS$, $BQOP$, $CROQ$ и $DSOR$ являются описанными. Докажите, что прямые AC, PQ и RS пересекаются в одной точке или параллельны.

5. Окружность Γ проходит через вершину A треугольника ABC и пересекает стороны AB и AC в точках E и F соответственно, а описанную окружность треугольника ABC вторично в точке P. Докажите, что точка, симметричная P относительно EF, лежит на BC тогда и только тогда, когда Γ проходит через центр описанной окружности треугольника ABC.

6. В остроугольном треугольнике ABC точка O — центр описанной окружности, G — центр масс. Пусть D — середина стороны BC, E — точка на окружности с диаметром BC, лежащая внутри треугольника ABC, такая, что $AE \perp BC$. Пусть $F = EG \cap OD$ и точки K и L на прямой BC таковы, что $FK \parallel OB$ и $FL \parallel OC$. Кроме того, точка $M \in AB$ такова, что $MK \perp BC$ и точка $N \in AC$ такова, что $NL \perp BC$. Наконец, окружность ω касается отрезков OB и OC в точках B и C. Если вы дочитали условие до конца, то докажите, что описанная окружность треугольника AMN касается окружности ω.

7. Внутри треугольника ABC дана точка P. Предположим, что L, M и N — середины сторон BC, CA и AB соответственно и $PL : PM : PN = BC : CA : AB$. Продолжения AP, BP и CP пересекают описанную окружность треугольника ABC в точках D, E и F соответственно. Докажите, что центры описанных окружностей треугольников APF, APE, BPF, BPD, CPD, CPE лежат на одной окружности.

8. Вписанная окружность неравнобедренного треугольника ABC касается его сторон BC, AC, AB в точках D, E и F соответственно. Пусть точки L, M и N симметричны точкам D,

E и F соответственно относительно EF, FD и DE. Пусть $AL \cap BC = P$, $BM \cap CA = Q$ и $CN \cap AB = R$. Докажите, что точки P, Q и R коллинеарны.

source:geometry/mixture-gX-east-asia.tex

Асимптотика

1. На бесконечной клетчатой доске двое по очереди делают ходы. Первый ставит в пустую клетку один крестик, потом второй — сто ноликов. Первый выигрывает, если нашелся прямоугольник с вершинами в крестиках, стороны которого параллельны линиям сетки. Может ли первый обеспечить себе победу?

2. Докажите, что плоскость нельзя покрыть 99 параболами с их внутренностями.

3. На клетчатой плоскости проведены прямые ℓ_1, ℓ_2, ..., ℓ_{99}, каждая из которых проходит через пару узлов целочисленной решётки. Для каждого конечного множества M, состоящего из узлов целочисленной решётки, определим его *тень* как набор $(M_1, M_2, \ldots, M_{99})$ проекций множества на прямые ℓ_1, ℓ_2, ..., ℓ_{99} соответственно. Докажите, что существует миллион попарно несовпадающих конечных множеств, состоящих из узлов целочисленной решётки, тени которых совпадают.

4. Существует ли отображение из некоторого трёхмерного шара в некоторый плоский круг, для каждой пары точек не уменьшающее расстояние между ними?

5. Плоскость разбита на равные многоугольники, причём в каждом многоугольнике содержится ровно по одной целой точке, и на границе целых точек нет. Докажите, что площадь многоугольников равна единице.

6. Докажите, что для любых натуральных n и k существует такой полный ориентированный граф G, обладающий свойством: для любого множества A, состоящего из k вершин графа G, существует такое множество B, состоящее из n вершин графа G, что A и B не имеют общих вершин и нет никаких стрелок из A в B.

7. Докажите, что существует натуральное число n, для которого уравнение

$$x^3 + y^3 + z^3 + t^3 = n$$

имеет не меньше миллиона решений в натуральных числах.

8. Из клетчатой плоскости выбросили все клетки, обе координаты которых делятся на 100. Можно ли все оставшиеся клетки обойти шахматным конём, побывав на каждой ровно по одному разу?

9. Дано множество V из n вершин, пронумерованных числами от 1 до n. Граф G на вершинах V называется *графом хорд,* если существует такое расположение n пронумерованных хорд некоторой окружности, что вершины i и j смежны в G тогда и только тогда, когда хорды i и j пересекаются. Верно ли, что для любого n любой граф с множеством вершин V можно представить как объединение не более чем 10 графов хорд?

source:combinatorics/asymptotic-g9.tex

Выпуклость

1. На круглой сковороде площади 1 испекли выпуклый блин (многоугольник) площади больше $1/2$. Докажите, что центр сковороды находится под блином.

2. На плоскости даны $n \geqslant 4$ точек. Известно, что любые 4 точки являются вершинами некоторого выпуклого четырёхугольника. Докажите, что эти n точек являются вершинами некоторого выпуклого n-угольника.

3. На плоскости даны несколько правильных n-угольников. Докажите, что выпуклая оболочка объединения всех этих n-угольников имеет не менее n вершин.

4. На плоскости даны три попарно непересекающихся выпуклых многоугольника. Докажите, что следующие два утверждения равносильны.
   - Не существует прямой, пересекающей все три многоугольника.
   - Любой из многоугольников можно отделить прямой от двух других.

5. На плоскости нарисовано несколько прямых общего положения, по каждой из которых со скоростью 1 ползёт жук. Докажите, что в некоторый момент времени жуки окажутся в вершинах некоторого выпуклого многоугольника.

6. Докажите, что выпуклый многоугольник площади 1 можно поместить в некоторый прямоугольник площади 2.

7. Определите минимальное натуральное число k такое, что любой выпуклый 100-угольник можно получить пересечением k треугольников.

source:combinatorics/convex-g9/1-r1.tex

Теорема Хелли

1. *Теорема Хелли.*

(a) На прямой даны несколько отрезков, любые два из которых имеют общую точку. Докажите, что все отрезки имеют общую точку.

(b) На плоскости даны четыре выпуклые фигуры, причём любые три из них имеют общую точку. Докажите, что тогда и все они имеют общую точку.

(c) На плоскости дано n выпуклых фигур, причём любые три из них имеют общую точку. Докажите, что все n фигур имеют общую точку.

2. Дан выпуклый многоугольник. Известно, что для любых трёх его сторон существует такая точка S внутри многоугольника, что проекции точки S на прямые, содержащие эти стороны, попадают на сами стороны, а не на их продолжения. Докажите, что существует точка внутри многоугольника, обладающая тем же свойством относительно всех сторон одновременно.

3. На плоскости даны прямая ℓ и несколько не обязательно выпуклых многоугольников, каждые два из которых имеют общую точку. Докажите, что найдётся прямая, параллельная ℓ и пересекающая все эти многоугольники.

4. Несколько полуплоскостей покрывают всю плоскость. Докажите, что из них можно выбрать не более трёх, которые также покрывают всю плоскость.

5. *Теорема Юнга.* На плоскости даны несколько точек, причём расстояние между любыми двумя не превосходит 1. Докажите, что все точки можно накрыть кругом радиуса $1/\sqrt{3}$.

6. *Теорема Бляшке.* Про выпуклый многоугольник M известно, что для любой прямой длина отрезка, служащего проекцией многоугольника M на эту прямую, не меньше 1. Докажите, что M заключает внутри себя круг радиуса $1/3$.

7. Дано несколько параллельных отрезков, причём для любых трёх из них найдётся прямая, их пересекающая. Докажите, что найдётся прямая, пересекающая все эти отрезки.

8. *Теорема Красносельского.* Дан не обязательно выпуклый многоугольник M. Известно, что для любых трёх его сторон можно указать точку внутри M, из которой эти стороны видны полностью. Докажите, что существует точка внутри M, из которой видны полностью все стороны M.

source:combinatorics/convex-g9/2-r1-helly-theorem.tex

Игры

1. Изначально в ряд выставлены 100 мешков с деньгами; на каждом мешке написано, сколько в нём денег. Два игрока ходят поочерёдно. За один ход игрок забирает себе один из мешков с краю текущего ряда. Верно ли, что при любом распределении денег по мешкам первый игрок может играть так, чтобы присвоить себе не менее половины денег?

2. Игра для двух участников состоит из прямоугольного поля 1×25 и 25 фишек. В начальной позиции все клетки свободны. За один ход игрок либо выставляет новую фишку в одну из свободных клеток, либо передвигает ранее выставленную фишку в ближайшую справа свободную клетку. Игра заканчивается, когда все клетки будут заняты фишками, причём победителем считается игрок, сделавшим последний ход. Игроки ходят поочередно. Кто победит при правильной игре: начинающий или его соперник?

3. Дана доска 2018×2019. Два игрока ходят по очереди. Ход состоит в том, чтобы закрасить некоторую связную фигурку из 9 клеток. Запрещено закрашивать клетки повторно. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре: начинающий или его соперник? (Фигура из клеток называется *связной,* если из любой её клетки можно добраться до любой другой, не покидая фигуры и перемещаясь между соседними по стороне клетками).

4. Есть набор из 2001 карточки с написанными на них натуральными числами от 1 до 2001. В начале игры у первого игрока все карточки с нечётными числами, у второго — с чётными. Игроки ходят поочерёдно, начинает первый. За раунд игрок, делающий ход, выкладывает одну из своих карточек на стол; его оппонент после этого выкладывает одну из своих карточек. Тот, у кого число больше, получает очко. Игра заканчивается после 1000 раундов. Какое максимальное количество очков может набрать каждый из игроков, вне зависимости от игры своего соперника?

source:combinatorics/game-g9.tex

Целые и нецелые

0. У аптекаря есть три гирьки, с помощью которых он одному покупателю отвесил 100 г йода, другому — 101 г мёда, а третьему — 102 г перекиси водорода. (Гирьки он ставил только на одну чашку весов.) Могла ли каждая гирька быть легче 90 г?

1. Есть 10 карточек, на каждой по числу. Для каждого набора карточек вычислили его сумму. Не все суммы — целые. Какое наибольшее количество сумм может быть целыми?

Определение. Назовем *округлением* замену нецелого числа на одно из двух ближайших целых (с недостатком или с избытком), а целое пусть при округлении не меняется. Например, 3,14 можно округлить до 3 или до 4.

2. (a) Записано верное равенство: 100 слагаемых и их сумма. Докажите, что все нецелые числа можно округлить до целого так, чтобы равенство осталось верным.
(b) В вершинах куба выписаны числа, а на каждом ребре — сумма чисел в его концах. Докажите, что можно все 20 чисел округлить так, чтобы по-прежнему на каждом ребре стояла сумма чисел в его концах.
(c) В вершинах пятиугольной призмы выписаны числа, а на каждом ребре — сумма чисел в его концах. Всегда ли можно все 25 чисел округлить так, чтобы по-прежнему на каждом ребре стояла сумма чисел в его концах?

3. В 10 кошельках лежали монеты так, что веса любых двух монет из одного кошелька отличались не более чем на 1 г (веса монет могут быть нецелыми). Монеты смешали и положили в непрозрачный мешок. Саша про веса монет заранее ничего не знает. Он вынимает одну монету из мешка, взвешивает, затем кладет монету в одну из имеющихся 20 коробок, вынимает следующую монету и т.д. (Положив монету в коробку, потом её уже нельзя переложить). Докажите, что Саша может действовать так, чтобы в каждой коробке веса любых двух монет отличались не более чем на 1 г.

4. Даны 9 чисел a_1, a_2, ..., a_9. Известно, что не все числа $2a_1$, $2a_2$, ..., $2a_9$ — целые. Какое наибольшее число целых может быть среди попарных сумм $a_i + a_j$ $(i \neq j)$?

5. Надо сделать набор из пяти гирь, с помощью которых можно уравновесить любой целый вес от 5 г до 10 г (гири кладутся на одну чашку весов, измеряемый вес — на другую, веса гирь не обязательно целые). Одна гиря делается из золота, каждая из остальных не тяжелее золотой. Каким наименьшим количеством золота можно обойтись?

6. Шесть команд в однокруговом турнире набрали 10, 7, 6, 6, 3 и 3 очка. Сколько очков начислялось за победу, если за ничью давали 1 очко, а за поражение 0?

7. (a) В клетки прямоугольной таблицы вписаны числа. Выписаны также суммы для каждой строки, для каждого столбца и для всей таблицы. Все эти суммы оказались целыми. Докажите, что все числа в таблице можно округлить так, чтобы все суммы по-прежнему сходились.
(b) То же, но суммы могут быть не целыми. Докажите, что можно округлить числа в таблице и суммы так, чтобы всё сходилось.

Зачетные задачи

1. Вес каждой гирьки набора — нецелое число грамм. Ими можно уравновесить любой целый вес от 1 г до 40 г (гири кладутся на одну чашку весов, измеряемый вес — на другую). Каково наименьшее число гирь в таком наборе?

2. Алёна и Боря независимо друг от друга складывают одни и те же n чисел в одном порядке. На каждом шаге (написав первое число, прибавив второе и т. д.) они делают следующее. Если дробная часть полученной суммы меньше 0,5, то Алёна округляет до ближайшего меньшего целого, а Боря не округляет. Если же дробная часть больше или равна 0,5, то Боря округляет до ближайшего большего целого, а Алёна не округляет. Какова наибольшая возможная разность между результатами Бори и Алёны?

5. Имеется набор из 20 гирь, с помощью которых можно взвесить любой целый вес от 1 г до 1997 г (гири кладутся на одну чашку весов, измеряемый вес — на другую). Каков минимально возможный вес самой тяжелой гири такого набора?

6. **(a)** Из колоды отложили часть карт. Докажите, что оставшиеся можно разделить между двумя игроками так, чтобы у них общее число карт, число карт каждой масти и число карт каждого достоинства отличалось не более чем на 1.

(b) То же, но карты делятся между тремя игроками.

source:combinatorics/rounding-g9/r1.tex

Запусти процесс

Запустив процесс, можно «по цепочке» распространить свойство.

1. В последовательности чисел каждый член (кроме первого) на 18 больше суммы двух своих соседей. 20-й член равен 20,18. Докажите, что в последовательности никакие два соседних члена не являются оба целыми числами.

Получить искомую конструкцию можно методом последовательных улучшений. Например, увеличивая на каждом шаге число деталей, поставленных на место.

2. (a) Есть несколько кусков сыра, каждый — не тяжелее 100 г. Докажите, что их все можно разложить на две кучки так, чтобы веса кучек отличались не более чем на 100 г.
(b) Есть 20 камней неизвестного веса и двухчашечные весы без гирь. Докажите, что сделав не более 19 взвешиваний, можно все камни можно разложить на две кучки так, чтобы веса кучек отличались не более чем на вес самого тяжелого камня.

Запускаясь, надо понимать, какие промежуточные ситуации получаются в процессе, и как делать очередной шаг в разных ситуациях.

3. Ученики школы посещают кружки. Докажите, что можно несколько школьников принять в пионеры так, чтобы в каждом кружке был хотя бы один пионер и для любого пионера нашелся кружок, в котором он был бы единственным пионером.

4. Среди 50 школьников каждый знаком не менее чем с 25 другими. Докажите, что можно их разбить на группы из 2 или 3 человек так, чтобы каждый был знаком со всеми в своей группе.

При сборке детали не обязательно добавлять по одной. Можно соединять и куски из нескольких деталей, уменьшая общее число кусков.

5. На кольцевой дороге стоят несколько одинаковых автомобилей. Известно, что общего количества бензина в них достаточно на полный круг по кольцу. Докажите, что найдется автомобиль, который сможет проехать полный круг, забирая бензин у других автомобилей по мере проезда мимо них.

Делая очередной шаг, думайте не только о конечной цели, но и о возможности для следующего шага.

6. Есть 100 конфет 5 сортов, каждого сорта не более 50 штук. Докажите, что конфеты можно разбить на 50 пар так, чтобы в каждой паре конфеты были разного сорта.

7. На окружности отмечено 300 точек: по 100 точек синего, красного и зелёного цветов. Докажите, что можно провести 150 отрезков с концами в этих точках, соблюдая такие правила: (1) никакие два отрезка не пересекаются (даже в концах); (2) концы каждого отрезка — разного цвета.

Свяжите с конструкцией величину, меняющийся в одну сторону при улучшениях *(полуинвариант).* Если полуинваринт нельзя менять бесконечно, то его крайнее значение даст искомый результат *(принцип крайнего)*, или докажет, что исходная конструкция невозможна *(бесконечный спуск)*.

8. На олимпиаде у каждого участника не более 25 знакомых. Докажите, что можно рассадить всех участников по трём аудиториям так, чтобы у каждого в его аудитории было не более 8 знакомых.

9. На координатной плоскости лежит правильный пятиугольник. Докажите, что хотя бы у одной из его вершин есть не целая координата.

Зачетные задачи

1. На клетках доски 10×10 лежит по алмазу так, что на соседних по стороне клетках веса различны. Докажите, что алмазы можно переложить на клетки доски 2×50 так, чтобы по-прежнему веса на соседних клетках были различны.

2. На окружности расставлено несколько положительных чисел, каждое из которых не больше 1. Докажите, что можно разделить окружность на три дуги так, что суммы чисел на соседних дугах будут отличаться не больше чем на 1. (Если на дуге нет чисел, то сумма на ней считается равной нулю.)

4. Шайка разбойников отобрала у купца мешок монет. Каждая монета стоит целое число грошей. Оказалось, что какую бы монету ни отложить, оставшуюся сумму можно разделить между разбойниками поровну. Докажите, что если отложить одну монету, то число монет разделится на число разбойников.

5. У Карлсона есть 100 банок с вареньем. Банки не обязательно одинаковые, но в каждой не больше, чем третья часть всего варенья. На завтрак Карлсон может съесть поровну варенья из любых трёх банок. Докажите, что Карлсон может действовать так, чтобы за некоторое количество завтраков съесть все варенье.

source:combinatorics/process-g9-launch/r1.tex

Непрерывная комбинаторика: точки на отрезке и окружности

В некоторых задачах возникают комбинации из конечного числа объектов, но сами объекты выбираются из бесконечного набора, заданного непрерывным параметром или параметрами. Хорошей моделью в таких задачах служат наборы точек на прямой и окружности; работает обобщенный принцип Дирихле.

1. Хозяйка испекла для гостей пирог.
   (a) За столом может оказаться либо p человек, либо q. Как заранее разрезать пирог не более чем на $p + q - 1$ кусков (не обязательно равных), чтобы в любом случае его можно было раздать поровну?
   (b) За столом может оказаться либо 4 человека, либо 6. На какое минимальное количество кусков нужно заранее разрезать пирог, чтобы в любом случае его можно было раздать поровну?
   (c) А если либо 9, либо 15 гостей?

2. Есть 11 гирь, каждая весит меньше 100 г.
   (a) Выписаны по разу веса всевозможных пар из этих гирь. Докажите, что какие-то два веса отличаются менее чем на 4 г.
   (b) Известно, что каждая гиря отличается по весу более чем на 4 г от любой другой гири. Докажите, что можно выбрать 4 гири и разложить их на две пары так, чтобы веса пар отличались меньше, чем на 4 г.

3. (a) *Лемма о кратной подсумме.* В ряд выписали n целых чисел. Докажите, что в это ряду можно подчеркнуть одно или несколько подряд идущих чисел так, чтобы их сумма делилась на n.
   (b) В ряд выписаны действительные числа $a_1, a_2, a_3, ..., a_{1000}$. Докажите, что можно выделить одно или несколько стоящих рядом чисел так, что их сумма будет отличаться от целого числа меньше, чем на 0,001.

С группами точек можно поступать как с одним целым: переворачивать, сдвигать, сжимать или растягивать. Удачно выбранная операция помогает решить задачу.

4. (a) Известно, что число a положительно, а неравенство $1 < xa < 2$ имеет ровно 3 решения в целых числах. Сколько решений в целых числах может иметь неравенство $2 < xa < 3$?
   (b) Известно, что число a положительно, а неравенство $10 < a^x < 100$ имеет ровно 5 решений в натуральных числах. Сколько таких решений может иметь неравенство $100 < a^x < 1000$?

Полезно помнить, что на любом, сколь угодно малом, интервале найдется рациональное число.

5. Даны 100 различных чисел. Докажите, что можно умножить все числа на одно и то же рациональное число так, чтобы ровно половина из них стала больше 1000.

6. (a) Даны 3 пары положительных чисел: $a_1 < b_1$, $a_2 < b_2$, $a_3 < b_3$. Числа в каждой паре разрешается увеличить в целое число раз, для каждой пары в своё. Докажите, что можно добиться, чтобы все a_i стали меньше всех b_j.
   (b) Есть сто картинок, на каждой — взрослый и ребенок ростом поменьше (все двести человек на картинках разные). Из них надо собрать одну большую картину. При этом разрешается уменьшать видимый рост людей в целое число раз: эти целые числа могут быть разными для людей с разных картинок и должны быть одинаковыми для людей с одной картинки. Докажите, что можно добиться, чтобы на большой картине каждый взрослый имел рост больше каждого ребенка.

Среди всевозможных отрезков короче данного нет самого длинного: для каждого найдется еще длиннее. Для любой точки на интервале есть точка, более близкая к его концу.

7. Двое по очереди отмечают точки на окружности: первый — красным цветом, второй — синим. Когда отмечено по 2 точки каждого цвета, игра заканчивается. Затем каждый игрок находит на окружности дугу наибольшей длины с концами своего цвета, на которой больше нет отмеченных точек. У кого длина дуги больше — тот выиграл (в случае равенства длин дуг, а также при отсутствии таких дуг у обоих игроков — ничья). Кто из играющих может всегда выигрывать, как бы ни играл соперник?

Зачетные задачи

1. У Пети было 20 камней нецелого веса, выложенных по кругу. Для каждого камня Петя сделал взвешивание, положив этот камень на одну чашу весов, а пару его соседей — на другую чашу, и записал результат: тяжелее этот камень или легче (равенства ни разу не случилось). Докажите, что Вася может подменить все камни на камни целого веса так, чтобы такая же проверка дала точно те же результаты.

2. **(a)** Есть 10 яблок весом от 50 г до 100 г. Докажите, что из них можно можно выбрать два непересекающихся набора, чьи веса отличаются менее чем на 1 г.
   (b) То же, но в наборах должно быть одинаковое число яблок.

3. Купившему головку сыра весом 3 кг магазин предлагает призовую игру. Покупатель режет головку на 4 куска, а продавец выбирает из этих кусков один или несколько и раскладывает их на одну или на обе чаши весов. При неравновесии продавец обязан за счет магазина добавить призовой кусок сыра, уравновешивающий чаши. Продавец старается сделать приз поменьше, а покупатель — побольше. Найдите вес призового куска при наилучших действиях сторон.

4. Задача 7 когда каждый отмечает по $N > 2$ точек.

source:combinatorics/discrete-continuity-g9-points/r1.tex

Непрерывная комбинаторика: порядок и оценки

В некоторых задачах возникают комбинации из конечного числа объектов нецелого веса. Важным приемом является упорядочение объектов.

1. Есть несколько камней, выложенных в порядке возрастания весов. За какое наименьшее число взвешиваний на чашечных весах без гирь можно проверить или опровергнуть утверждение: Любые два камня вместе тяжелее одного?

2. Есть N упорядоченных по весу рубинов, и N упорядоченных по весу алмазов. Известно, что веса всех $2N$ камней различны. За одну проверку можно разбить все камни на N пар (рубин–алмаз) и для каждой пары узнать (на чашечных весах без гирь), какой из двух камней в ней тяжелее. Требуется найти разбиение на такие пары, в котором ровно в половине пар рубин тяжелее алмаза, или доказать, что такое разбиение невозможно. Каким наименьшим числом проверок можно обойтись? Решите задачу для
   (a) $N = 2$; (b) $N = 4$; (c) $N = 10$.

3. (a) Имеются 300 яблок, любые два из которых различаются по весу не более чем в два раза. Докажите, что их можно разложить в пакеты по два яблока так, чтобы любые два пакета различались по весу не более чем в полтора раза.
   (b) Имеются 300 яблок, любые два из которых различаются по весу не более чем в три раза. Докажите, что их можно разложить в пакеты по четыре яблока так, чтобы любые два пакета различались по весу не более чем в полтора раза.

4. Есть 1000 яблок, которые надо разложить в 10 пакетов по 100 яблок в каждом. Оказалось, что при любой такой раскладке найдутся хотя бы два пакета одинакового веса. Докажите, что
   (a) есть по крайней мере 200 яблок одинакового веса;
   (b) есть раскладка, когда по крайней мере 5 пакетов весят одинаково.

Разбиения с небольшой разницей

5. *Лемма о цене игры.* На столе лежат несколько кусков шоколада, самый большой весит b. Петя начинает, и они с Васей по очереди съедают по куску, пока не съедят всё. Докажите, что при наилучших действиях Васи Петя сможет съесть
   (a) не меньше Васи;
   (b) не более чем на b больше Васи.

6. *Лемма о способах выбора.* Есть $2n$ кусков сыра. Докажите, что можно не менее чем $2n$ способами разложить их по n штук на две чаши весов так, чтобы разность весов чаш была не больше веса самого тяжелого куска.

7. В 31 ящике лежит смесь апельсинов и бананов. Докажите, что можно так выбрать
   (a) 16 ящиков, что в них окажется по весу не менее половины всех апельсинов и не менее половины всех бананов;

(b) 11 ящиков, что в них окажется по весу не менее трети всех апельсинов и не менее трети всех бананов.

Зачетные задачи

1. Есть 20 фруктов. Назовем натуральное число $k < 20$ *хорошим,* если найдется k фруктов, чей вес равен ровно половине общего веса. Каково наибольшее возможное количество хороших чисел?

2. Есть 1000 яблок, которые надо разложить в 10 пакетов по 100 яблок в каждом. Оказалось, что при любой такой раскладке найдутся хотя бы два пакета одинакового веса. Докажите, что найдутся по крайней мере 900 яблок одинакового веса.

3. Есть 100 слив с косточками. Веса любых двух слив отличаются не более чем вдвое, и веса любых двух косточек тоже отличаются не более чем вдвое. Общий вес косточек втрое меньше общего веса слив. Докажите, что сливы можно разделить на две кучки по 50 штук так, чтобы в каждой кучке доля косточек была меньше 40%.

source:combinatorics/discrete-continuity-g9-ordering/r1.tex

Глава 2

Стрижи (9-2)

Теорема Виета для квадратных и кубических уравнений

1. Существуют ли такие действительные числа b и c, что каждое из уравнений $x^2+bx+c=0$ и $2x^2+(b+1)x+c+1=0$ имеет по два целых корня?

2. Известно, что x_1, x_2, x_3 — корни уравнения $x^3-2x^2+x+1=0$. Составьте новое уравнение, корнями которого были бы числа x_1x_2, x_1x_3, x_2x_3.

3. Можно ли подобрать три действительных числа так, чтобы их сумма была равна числу a, сумма попарных произведений была равна числу a^2, а произведение равно числу a^3?

4. Верно ли, что для любых трёх различных натуральных чисел a, b, c найдётся квадратный трёхчлен с целыми коэффициентами, принимающий в этих точках значения a^3, b^3, c^3 соответственно? *(Всерос-2017, 9.6)*

5. Числа a, b, c таковы, что уравнение $x^3+ax^2+bx+c=0$ имеет три корня, и выполнено условие $a+b+c \in [-2, 0]$. Докажите, что хотя бы один из корней принадлежит отрезку $[0, 2]$. *(Всерос-2008, 9.2)*

6. Целые числа a, b и c таковы, что числа $a/b+b/c+c/a$ и $a/c+c/b+b/a$ тоже целые. Докажите, что $|a|=|b|=|c|$.

7. Миша решил уравнение $x^2+ax+b=0$ и сообщил Диме набор из четырёх чисел — два корня и два коэффициента этого уравнения (но не сказал, какие именно из них корни, а какие — коэффициенты).

(a) Сможет ли Дима узнать, какое уравнение решал Миша, если все числа набора оказались различными?

(b) Тот же вопрос, если последнее условие не выполняется.

8. Сколькими способами числа $2^0, 2^1, 2^2, \ldots, 2^{2005}$ можно разбить на два непустых множества A и B так, чтобы уравнение $x^2-S(A)x+S(B)=0$, где $S(M)$ — сумма чисел множества M, имело целый корень?

9. Числа от 51 до 150 расставлены в таблицу 10×10. Может ли случиться, что для каждой пары чисел a, b, стоящих в соседних по стороне клетках, хотя бы одно из уравнений $x^2-ax+b=0$ и $x^2-bx+a=0$ имеет два целых корня?

10. Даны $n>1$ приведённых квадратных трёхчленов $x^2-a_1x+b_1, \ldots, x^2-a_nx+b_n$, причём все $2n$ чисел $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ различны. Может ли случиться, что каждое из чисел $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ является корнем одного из этих трёхчленов?

`source:algebra/polynomial/vieta-formulas-g9r2.tex`

Многочлен третьей степени: график и корни

1. Докажите, что любой многочлен третьей степени принимает как положительные, так и отрицательные значения.

2. Найдите хотя бы один корень уравнения $x^3 - 3\sqrt{6}x + 2\sqrt{2} + 3\sqrt{3} = 0$. Сколько корней имеет это уравнение?

3. Две параллельные прямые проведены так, что каждая из них пересекает график кубического многочлена в трёх точках. Первая в точках A, D, E. Вторая — в точках B, C, F. Докажите, что длина проекции дуги CD на ось абсцисс равна сумме длин проекций дуг AB и EF.

4. На доске написано уравнение $x^3 + *x^2 + *x + * = 0$. Два игрока по очереди заменяют звёздочки целыми числами, отличными от нуля. Первый игрок выигрывает, если полученное уравнение имеет не менее двух различных целых корней, в противном случае выигрывает второй игрок. Кто выиграет при правильной игре?

5. На координатной плоскости имеется квадрат со сторонами, параллельными осям координат. Этот квадрат поделён на 64 равных квадратика прямыми, параллельными осям координат. Внутри квадрата движется точка, координаты которой в каждый момент времени t вычисляются по формулам $x = at^3 + bt^2 + ct + d$, $y = At^3 + Bt^2 + Ct + D$. Докажите, что среди этих 64 квадратиков найдётся такой, внутри которого точка не находилась ни в какой момент времени.

6. У Феди есть три палочки. Если из них нельзя сложить треугольник, Федя укорачивает самую длинную из палочек на сумму длин двух других. Если длина палочки не обратилась в нуль и треугольник снова нельзя сложить, то Федя повторяет операцию, и т. д. Может ли этот процесс продолжаться бесконечно?

7. Сумма трёх положительных чисел равна 10, а сумма их квадратов больше 20. Докажите, что сумма их кубов больше 40.

8. Приведённый многочлен третьей степени имеет три вещественных положительных корня. Выпишите необходимое и достаточное условие на его коэффициенты, гарантирующее, что эти корня являются длинами сторон некоторого треугольника.

source:algebra/polynomial/cubic-g9r2.tex

Немного неравенств

1. Сумма нескольких положительных чисел равна 10, а сумма их квадратов больше 20. Докажите, что сумма их кубов больше 40.

2. Сумма квадратов трёх положительных чисел x, y, z равна 1. Найдите наименьшее возможное значение величины $xy/z + yz/x + xz/y$.

3. Целые числа a и b таковы, что при любых натуральных m и n число $am^2 + bn^2$ является точным квадратом. Докажите, что одно из этих чисел равно нулю.

source:algebra/inequality/mixture-g9r2-mini.tex

Неравенства без методов

1. Докажите, что для всех положительных значений переменных выполнено неравенство

$$\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} \geqslant 4(x - z)\,.$$

2. Действительные числа a, b, c выбраны так, что $a > b > c$. Докажите, что

$$a^2b + b^2c + c^2a > b^2a + c^2b + a^2c\,.$$

3. Действительные числа a, b, c выбраны так, что $a^2 + b^2 + ca + ba + cb < 0$. Докажите, что $c^2 > b^2 + a^2$.

4. Числа a, b, c не меньше, чем 0,5. Докажите неравенство

$$\frac{a+b}{1+c} + \frac{a+c}{1+b} + \frac{b+c}{1+a} \geqslant 2\,.$$

5. Неотрицательные числа x, y, z не превосходят 1. Докажите неравенство.

$$\frac{x}{7+y^3+z^3} + \frac{y}{7+z^3+x^3} + \frac{z}{7+x^3+y^3} \leqslant \frac{1}{3}\,.$$

6. Пусть a, b, c — длины сторон треугольника. Докажите неравенство

$$a^4 + b^4 + c^4 + abc(a+b+c) \leqslant 2(a^2b^2 + c^2a^2 + b^2c^2)\,.$$

source:algebra/inequality/mixture-g9r2-plain.tex

Первый разнобой по ТЧ

1. Преобразуем сумму $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{100}$ в дробь $\frac{m}{n}$. Докажите, что m делится на 101.
2. Пусть m и n натуральные числа такие, что m^2+n^2+m делится на mn. Докажите, что m — полный квадрат.
3. Докажите, что $2^{n!}-1 \vdots (n^2-1)$ для всех чётных n.
4. Найдите все натуральные n такие, что
$$1^n+2^n+\ldots+(n-1)^n \vdots n\,.$$
5. Найдите все натуральные n, что $3^n-2^n \vdots n$.
6. Докажите, что $2^{3^k}+1$ делится на 3^{k+1}.
7. Для каких натуральных n число $(n-1)!+1$ является точной степенью n?
8. Найдите все такие натуральные x и простые p, что выполняется $x^8+2^{2^x+2}=p$.

source:algebra/number-theory/mixture-g9/r2.tex

Сравнения и классические теоремы

Теорема Эйлера. Пусть n — натуральное число, a — взаимно просто с n. Тогда

$$a^{\varphi(n)} - 1 \,\vdots\, n\,,$$

где $\varphi(n)$ — функция Эйлера: количество чисел, взаимно простых с n и не превосходящих n.

1. Докажите, что число $40^{81} + 17^{160}$ является составным.

2. Докажите, что любой нечетный простой делитель a^2+1, где a — натуральное, имеет вид $4m+1$.

3. Найдите все простые p и натуральные n такие, что $7^{p^n} + 1$ делится на p^n.

4. Докажите, что ни при каком целом k число $k^2 + k + 1$ не делится на 101.

5. Пусть a — нечетное число. Докажите, что числа $a^{2^n} + 2^{2^n}$ и $a^{2^m} + 2^{2^m}$ взаимно просты при любых натуральных $n \neq m$.

6. Найдите все натуральные n, для которых $n^n + 1$ и $(2n)^{2n} + 1$ являются простыми.

7. Докажите, что для любого натурального числа n существует натуральное число K такое, что сумма цифр K равна n, и K делится на n.

8. Даны натуральные числа k и n. Артём пишет на блокноте числа n, n^n, n^{n^n}, $n^{n^{n^n}}$ и так далее (каждое новое число получается возведением числа n в степень предыдущего числа). Докажите, что рано или поздно остатки при делении на k у чисел Артёма будут одни и те же.

source:algebra/number-theory/modular-arithmetic-g9r2-and-euler-theorem.tex

Добавка (теория чисел)

1. Пусть n — чётное число, а натуральные числа a и b взаимно просты. При каких a и b число $\frac{a^n+b^n}{a+b}$ – целое?

2. Докажите, что существует бесконечно много n таких, что уравнение

$$a^2 + b^2 + 1 = 3^n$$

имеет хотя бы одно решение в натуральных числах.

3. При каком наименьшем k существуют натуральные числа $x_1, x_2, ..., x_k$ такие, что

$$x_1^3 + x_2^3 + ... + x_k^3 = 2002^{2002}\,?$$

4. Найдите все тройки простых p, q, r таких, что $p \mid q^r + 1,\ q \mid r^p + 1,\ r \mid p^q + 1.$

source:algebra/number-theory/mixture-g9r2-more.tex

Про показатели

1. Найдите все простые p и q такие, что $q \mid 2^p - 1$ и $p \mid 2^q - 1$.
2. Докажите, что если $a > 1$, то n делит $\varphi(a^n - 1)$.
3. Пусть $p > 2$ – простое число. Докажите, что любой простой делитель числа $(a^p - 1)$ или делит $(a - 1)$ или имеет вид $2px + 1$.
4. Докажите, что любой нечетный простой делитель числа $a^{2^k} + 1$ имеет вид $2^{k+1}x + 1$.
5. Пусть p — простое число. Докажите, что все простые делители числа $p^p - 1$ и большие p дают остаток 1 при делении на p.
6. Пусть p и q — простые числа, большие 5. Докажите, что если $p \mid 2^q + 3^q$, то $q < p$.
7. Пусть p — простое число, d — один из делителей числа $p - 1$. Выберем из остатков $1, 2, \ldots, p - 1$ те, чей показатель по модулю p равен d. Чему равен остаток произведения всех выбранных чисел по модулю p?
8. Найдите все простые p и q, для которых $5^p + 5^q$ делится на pq.

source:algebra/number-theory/exponent-g9/r2.tex

Вступительный разнобой

1. Дана точка A и окружность ω, не проходящая через A. Докажите, что
   (a) все окружности, проходящие через точку A и пересекающие окружность ω в диаметрально противоположных точках, проходят одновременно через некоторую точку A', отличную от A;
   (b) все окружности, проходящие через точку A и перпендикулярные к окружности ω, проходят одновременно через некоторую точку A', отличную от A. (Окружности называются перпендикулярными, если касательные, проведенные к ним в точке пересечения, перпендикулярны.)

2. В параллелограмме $ABCD$ дана точка M, такая что $\angle MAD = \angle MCD$. Докажите, что $\angle MBA = \angle MDA$.

3. Внутри окружности зафиксирована точка A, а на окружности взяты произвольные точки B и C так, что $\angle BAC = 90°$. Найдите геометрическое место середин хорд BC.

4. На сторонах AB, BC и CA треугольника ABC взяты точки P, Q и R соответственно. Докажите, что центры описанных окружностей треугольников APR, BPQ и CQR образуют треугольник, подобный треугольнику ABC.

5. Медиана AM треугольника ABC пересекает вписанную в него окружность в точках X и Y. Известно, что $AB = AC + AM$. Найдите $\angle XIY$, где I — центр вписанной окружности.

6. В остроугольном треугольнике ABC точки O и I — центры описанной и вписанной окружностей соответственно. При этом $\angle OIA = 30°$. Докажите, что один из углов B и C равен $60°$.

7. На отрезке MN построены подобные, одинаково ориентированные треугольники AMN, NBM и MNC. Докажите, что треугольник ABC подобен всем этим треугольникам, а центр его описанной окружности равноудален от точек M и N.

8. Окружность, проходящая через вершины A и B треугольника ABC, пересекает сторону BC в точке D. Окружность, проходящая через вершины B и C, пересекает сторону AB в точке E и первую окружность вторично в точке F. Оказалось, что точки A, E, D, C лежат на окружности с центром O. Докажите, что угол BFO — прямой.

source:geometry/mixture-g9-intro.tex

Введение в инверсию

1. **(a)** Пусть при инверсии с центром O точка A переходит в A', а точка B переходит в B'. Докажите, что треугольники OAB и $OB'A'$ подобны.
(b) Докажите, что при инверсии с центром O прямая ℓ, не проходящая через O, переходит в окружность, проходящую через O, а окружность, проходящая через O, переходит в прямую, не проходящую через O.
(c) Докажите, что при инверсии с центром O окружность, не проходящая через O, переходит в окружность, не проходящую через O.

2. **(a)** Докажите, что при инверсии касающиеся окружности (прямая и окружность) переходят в касающиеся окружности, или в касающиеся окружность и прямую, или в пару параллельных прямых.
(b) Докажите, что при инверсии сохраняется угол между окружностями (между окружностью и прямой, между прямыми).

3. Точки A и B лежат на окружности ω. Касательные к окружности, проходящие через точки A и B, пересекаются в точке P. Докажите, что P является образом середины хорды AB при инверсии относительно ω.

4. **(a)** Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность, $AB \cdot CD = AD \cdot BC$. При инверсии с центром в точке A и радиусом 1 точка B переходит в B', C — в C' и D — в D'. Докажите, что $B'C' = C'D'$.
(b) Докажите с помощью инверсии теорему Птолемея.

5. Что является образом описанной окружности треугольника при инверсии относительно вписанной окружности?

6. Дана окружность и точка P внутри нее, отличная от центра. Рассматриваются пары окружностей, касающиеся данной изнутри и друг друга в точке P. Найдите геометрическое место точек пересечения общих внешних касательных к этим окружностям.

7. Докажите, что две непересекающиеся окружности S_1 и S_2 можно при помощи инверсии перевести в пару концентрических окружностей.

8. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и BB_1.
(a) Что является образом прямой A_1B_1 при инверсии с центром C, которая переводит точку A_1 в точку B?
(b) Прямая A_1B_1 пересекает описанную окружность треугольника ABC в точках X и Y. Окружность, описанная около треугольника CBB_1, пересекает высоту AA_1 в точке Z. Докажите, что $CX = CY = CZ$.

`source:geometry/inversion-g9/1-r2.tex`

Еще задачи на инверсию

1. Через точку A к окружности ω с центром O проведены касательные AX и AY, а также секущая, пересекающая окружность в точках Z и T. Докажите, что точки Z, T, O и середина XY лежат на одной окружности.

2. *С помощью инверсии!*
(a) Окружность s_1 касается окружности s внутренним образом в точке N. Хорда AB окружности s касается окружности s_1 в точке M. Докажите, что MN делит дугу AB, не содержащую точку N, пополам.
(b) Окружности s_1 и s_2 касаются окружности s внутренним образом. Хорда AB окружности s является общей внешней касательной окружностей s_1 и s_2. Докажите, что их радикальная ось проходит через середину дуги AB.

3. Пусть p — полупериметр треугольника ABC. Точки E и F на прямой BC таковы, что $AE = AF = p$. Докажите, что описанная окружность треугольника AEF касается вневписанной окружности треугольника ABC со стороны BC.

4. Окружности Γ_1 и Γ_3 касаются внешним образом в точке P, и окружности Γ_2 и Γ_4 тоже касаются внешним образом в точке P. При этом окружности Γ_1 и Γ_2 повторно пересекаются в точке A, Γ_2 и Γ_3 — в точке B, Γ_3 и Γ_4 — в точке C, Γ_4 и Γ_1 — в точке D. Докажите, что

$$\frac{AB \cdot BC}{CD \cdot DA} = \frac{PB^2}{PD^2}\,.$$

5. Пусть P — точка внутри треугольника ABC такая, что

$$\angle APB - \angle ACB = \angle APC - \angle ABC\,.$$

Пусть точки D и E — центры вписанных окружностей треугольников APB и APC соответственно. Докажите, что прямые AP, BD и CE пересекаются в одной точке.

6. В полуокружность ω, стягиваемую диаметром PQ, вписана окружность, касающаяся диаметра в точке C. Точки A на ω и B на отрезке CQ таковы, что AB касается окружности и $AB \perp PQ$. Докажите, что CA — биссектриса угла BAP.

7. Из точки K проведены касательные KN и KL к окружности ω. На луче KN за точкой N выбрана точка M. Описанная окружность треугольника KLM повторно пересекает окружность ω в точке P, а Q — проекция точки N на ML. Докажите, что $\angle MPQ = 2\angle KML$.

8. На прямой ℓ заданы точки A, B и C в указанном порядке. На отрезках AB, BC и CA по одну сторону от прямой ℓ построены полуокружности ω_1, ω_2 и ω соответственно. Окружность γ_1 касается всех трех полуокружностей. Окружности γ_n при $n \geqslant 2$ касаются полуокружностей ω и ω_1 и окружности γ_{n-1}. Найдите отношение расстояния от центра окружности γ_n до прямой ℓ к ее радиусу.

Предполярный разнобой

1. **(a)** Внутри окружности зафиксирована точка A, а на окружности взяты произвольные точки B и C так, что $\angle BAC = 90°$. Найдите геометрическое место точек пересечения касательных к окружности, проведенных в точках B и C.
(b) Внутри окружности зафиксирована точка A и через нее проводятся всевозможные хорды BC. Найдите геометрическое место точек пересечения касательных к окружности, проведенных в точках B и C.
(c) Через точку A вне окружности проводятся всевозможые секущие, пересекающие окружность в точках B и C. Найдите геометрическое место точек пересечения касательных к окружности, проведенных в точках B и C.

2. Стороны AB, BC, CD и DA описанного четырехугольника $ABCD$ касаются вписанной окружности в точках K, L, M и N соответственно. Отрезок KM пересекает диагональ AC в точке X. Докажите, что
(a) $AX/XC = AK/MC$;
(b) диагонали четырехугольников $ABCD$ и $KLMN$ пересекаются в одной точке.

3. Через точку A, лежащую вне окружности проведены две секущие. Первая пересекает окружность в точках K и L (L лежит между A и K), а вторая — в точках M и N (M лежит между A и N). Касательные в точках K и L пересекаются в точке X, касательные в точках M и N — в точке Y. Докажите, что
(a) точка пересечения диагоналей четырехугольника $KLMN$ лежит на прямой XY;
(b) прямые LM и KN пересекаются на прямой XY или параллельны ей.

4. Дана окружность ω с центром O и четыре такие точки A, B, A' и B', что A' и B' соответственно симметричны точкам A и B относительно ω. Через точку A' проведена прямая a, перпендикулярная OA, а через точку B' — прямая b, перпендикулярная OB. Докажите, что если A лежит на b, то B лежит на a.
(a) Рассмотрите случай, когда A и B лежат вне окружности.
(b) Рассмотрите все остальные случаи.

5. Окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B. Касательные в точке A к ω_1 и ω_2 повторно пересекают окружности в точках C и D. Точка E такова, что B — середина отрезка AE. Докажите, что точки A, C, D и E лежат на одной окружности.

6. В четырехугольнике $ABCD$ выполнено соотношение $\angle A + \angle C = 90°$. Докажите, что

$$(AB \cdot CD)^2 + (BC \cdot AD)^2 = (AC \cdot BD)^2 .$$

7. Четыре окружности ω_1, ω_2, ω_3 и ω_4 попарно касаются друг друга внешним образом. Обозначим через A_{ij} точку касания окружностей ω_i и ω_j. Докажите, что прямые $A_{12}A_{34}$, $A_{13}A_{24}$ и $A_{14}A_{23}$ пересекаются в одной точке.

8. Точка I — центр вписанной окружности треугольника ABC. Меньшую из окружностей, проходящих через точку I и касающихся сторон AB и AC, обозначим через ω_A. Аналогично определим ω_B и ω_C. Вторые точки пересечения ω_A и ω_B, ω_B и ω_C, ω_C и ω_A обозначим через C_1, A_1, B_1 соответственно. Докажите, что центры окружностей, описанных около треугольников AA_1I, BB_1I и CC_1I, лежат на одной прямой.

source:geometry/polar-line-g9/1-r2.tex

Полярная

1. Окружности ω_1 и ω_2 перпендикулярны. Точки A и B диаметрально противоположны в окружности ω_1. Докажите, что поляра A относительно ω_2 проходит через B.

2. Дан треугольник ABC и его описанная окружность ω. Точки A_1, B_1 и C_1 на прямых BC, CA и AB соответственно таковы, что B_1 и C_1 лежат на поляре точки A_1 относительно ω. Докажите, что C_1 лежит на поляре точки B_1 относительно ω.

3. Точки X, Y и Z — точки пересечения противоположных сторон и точка пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$, вписанного в окружность с центром O. Докажите, что O — ортоцентр треугольника XYZ.

4. Высоты BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке H. Прямые B_1C_1 и BC пересекаются в точке K. Докажите, что прямая KH перпендикулярна медиане AM.

5. Четырехугольник $ABCD$ описан около окружности с центром в точке O. Прямые AB и CD пересекаются в точке P, а прямые AD и BC — в точке Q, причем отрезки BP и DQ пересекаются в точке A; M — основание перпендикуляра, опущенного из точки O на PQ. Докажите, что

(a) точка пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$ лежит на прямой OM;

(b) $\angle BMO = \angle DMO$.

6. Вписанная окружность треугольника ABC с центром I касается сторон AC и AB в точках E и F. Точка J на EF такова, что прямая BJ параллельна AC. Пусть $CJ \cap AB = K$. Докажите, что прямая IK параллельна EF.

7. На прямой, содержащей диаметр AB окружности Ω с центром O, за точкой B выбрана точка C. Прямая, проходящая через C, пересекает Ω в точках D и E. Отрезок OF — диаметр окружности ω, описанной около треугольника DOB. Прямая CF пересекает повторно окружность ω в точке G. Докажите, что точки O, A, E и G лежат на одной окружности.

8. Докажите, что во вписанно-описанном четырехугольнике прямая, соединяющая центры вписанной и описанной окружностей проходит через точку пересечения диагоналей.

`source:geometry/polar-line-g9/2-r2.tex`

Асимптотика

1. На бесконечной клетчатой доске двое по очереди делают ходы. Первый ставит в пустую клетку один крестик, потом второй — сто ноликов. Первый выигрывает, если нашелся прямоугольник с вершинами в крестиках, стороны которого параллельны линиям сетки. Может ли первый обеспечить себе победу?

2. Докажите, что плоскость нельзя покрыть 99 параболами с их внутренностями.

3. На клетчатой плоскости проведены прямые ℓ_1, ℓ_2, ..., ℓ_{99}, каждая из которых проходит через пару узлов целочисленной решётки. Для каждого конечного множества M, состоящего из узлов целочисленной решётки, определим его *тень* как набор $(M_1, M_2, \ldots, M_{99})$ проекций множества на прямые ℓ_1, ℓ_2, ..., ℓ_{99} соответственно. Докажите, что существует миллион попарно несовпадающих конечных множеств, состоящих из узлов целочисленной решётки, тени которых совпадают.

4. Существует ли отображение из некоторого трёхмерного шара в некоторый плоский круг, для каждой пары точек не уменьшающее расстояние между ними?

5. Плоскость разбита на равные многоугольники, причём в каждом многоугольнике содержится ровно по одной целой точке, и на границе целых точек нет. Докажите, что площадь многоугольников равна единице.

6. Докажите, что для любых натуральных n и k существует такой полный ориентированный граф G, обладающий свойством: для любого множества A, состоящего из k вершин графа G, существует такое множество B, состоящее из n вершин графа G, что A и B не имеют общих вершин и нет никаких стрелок из A в B.

7. Докажите, что существует натуральное число n, для которого уравнение
$$x^3 + y^3 + z^3 + t^3 = n$$
имеет не меньше миллиона решений в натуральных числах.

8. Из клетчатой плоскости выбросили все клетки, обе координаты которых делятся на 100. Можно ли все оставшиеся клетки обойти шахматным конём, побывав на каждой ровно по одному разу?

9. Дано множество V из n вершин, пронумерованных числами от 1 до n. Граф G на вершинах V называется *графом хорд,* если существует такое расположение n пронумерованных хорд некоторой окружности, что вершины i и j смежны в G тогда и только тогда, когда хорды i и j пересекаются. Верно ли, что для любого n любой граф с множеством вершин V можно представить как объединение не более чем 10 графов хорд?

source:combinatorics/asymptotic-g9.tex

Выпуклость

1. На круглой сковороде площади 1 испекли выпуклый блин (многоугольник) площади больше $1/2$. Докажите, что центр сковороды находится под блином.

2. На плоскости даны $n \geqslant 4$ точек. Известно, что любые 4 точки являются вершинами некоторого выпуклого четырёхугольника. Докажите, что эти n точек являются вершинами некоторого выпуклого n-угольника.

3. На плоскости даны несколько правильных n-угольников. Докажите, что выпуклая оболочка объединения всех этих n-угольников имеет не менее n вершин.

4. На плоскости нарисовано несколько прямых общего положения, по каждой из которых со скоростью 1 ползёт жук. Докажите, что в некоторый момент времени жуки окажутся в вершинах некоторого выпуклого многоугольника.

5. Докажите, что выпуклый многоугольник площади 1 можно поместить в некоторый прямоугольник площади 2.

6. Определите минимальное натуральное число k такое, что любой выпуклый 100-угольник можно получить пересечением k треугольников.

source:combinatorics/convex-g9/1-r2.tex

Теорема Хелли

1. *Теорема Хелли.*
(a) На прямой даны несколько отрезков, любые два из которых имеют общую точку. Докажите, что все отрезки имеют общую точку.
(b) На плоскости даны четыре выпуклые фигуры, причём любые три из них имеют общую точку. Докажите, что тогда и все они имеют общую точку.
(c) На плоскости дано n выпуклых фигур, причём любые три из них имеют общую точку. Докажите, что все n фигур имеют общую точку.

2. Дан выпуклый многоугольник. Известно, что для любых трёх его сторон существует такая точка S внутри многоугольника, что проекции точки S на прямые, содержащие эти стороны, попадают на сами стороны, а не на их продолжения. Докажите, что существует точка внутри многоугольника, обладающая тем же свойством относительно всех сторон одновременно.

3. На плоскости даны прямая ℓ и несколько не обязательно выпуклых многоугольников, каждые два из которых имеют общую точку. Докажите, что найдётся прямая, параллельная ℓ и пересекающая все эти многоугольники.

4. Несколько полуплоскостей покрывают всю плоскость. Докажите, что из них можно выбрать не более трёх, которые также покрывают всю плоскость.

5. **(a)** На плоскости даны несколько точек, любые три из которых можно накрыть кругом радиуса 1. Докажите, что все точки можно накрыть кругом радиуса 1.
(b) *Теорема Юнга.* На плоскости даны несколько точек, причём расстояние между любыми двумя не превосходит 1. Докажите, что все точки можно накрыть кругом радиуса $1/\sqrt{3}$.

6. *Теорема Бляшке.* Про выпуклый многоугольник M известно, что для любой прямой длина отрезка, служащего проекцией многоугольника M на эту прямую, не меньше 1. Докажите, что M заключает внутри себя круг радиуса $1/3$.

7. Дано несколько параллельных отрезков, причём для любых трёх из них найдётся прямая, их пересекающая. Докажите, что найдётся прямая, пересекающая все эти отрезки.

source:combinatorics/convex-g9/2-r2-helly-theorem.tex

Игры

1. Изначально в ряд выставлены 100 мешков с деньгами; на каждом мешке написано, сколько в нём денег. Два игрока ходят поочерёдно. За один ход игрок забирает себе один из мешков с краю текущего ряда. Верно ли, что при любом распределении денег по мешкам первый игрок может играть так, чтобы присвоить себе не менее половины денег?

2. Игра для двух участников состоит из прямоугольного поля 1×25 и 25 фишек. В начальной позиции все клетки свободны. За один ход игрок либо выставляет новую фишку в одну из свободных клеток, либо передвигает ранее выставленную фишку в ближайшую справа свободную клетку. Игра заканчивается, когда все клетки будут заняты фишками, причём победителем считается игрок, сделавшим последний ход. Игроки ходят поочередно. Кто победит при правильной игре: начинающий или его соперник?

3. Дана доска 2018×2019. Два игрока ходят по очереди. Ход состоит в том, чтобы закрасить некоторую связную фигурку из 9 клеток. Запрещено закрашивать клетки повторно. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре: начинающий или его соперник? (Фигура из клеток называется *связной,* если из любой её клетки можно добраться до любой другой, не покидая фигуры и перемещаясь между соседними по стороне клетками).

4. Есть набор из 2001 карточки с написанными на них натуральными числами от 1 до 2001. В начале игры у первого игрока все карточки с нечётными числами, у второго — с чётными. Игроки ходят поочерёдно, начинает первый. За раунд игрок, делающий ход, выкладывает одну из своих карточек на стол; его оппонент после этого выкладывает одну из своих карточек. Тот, у кого число больше, получает очко. Игра заканчивается после 1000 раундов. Какое максимальное количество очков может набрать каждый из игроков, вне зависимости от игры своего соперника?

source:combinatorics/game-g9.tex

Целые и нецелые

0. У аптекаря есть три гирьки, с помощью которых он одному покупателю отвесил 100 г йода, другому — 101 г мёда, а третьему — 102 г перекиси водорода. (Гирьки он ставил только на одну чашку весов.) Могла ли каждая гирька быть легче 90 г?

1. Есть 10 карточек, на каждой по числу. Для каждого набора карточек вычислили его сумму. Не все суммы — целые. Какое наибольшее количество сумм может быть целыми?

Определение. Назовем *округлением* замену нецелого числа на одно из двух ближайших целых (с недостатком или с избытком), а целое пусть при округлении не меняется. Например, 3,14 можно округлить до 3 или до 4.

2. (a) Записано верное равенство: 100 слагаемых и их сумма. Докажите, что все нецелые числа можно округлить до целого так, чтобы равенство осталось верным.
(b) В вершинах куба выписаны числа, а на каждом ребре — сумма чисел в его концах. Докажите, что можно все 20 чисел округлить так, чтобы по-прежнему на каждом ребре стояла сумма чисел в его концах.
(c) В вершинах пятиугольной призмы выписаны числа, а на каждом ребре — сумма чисел в его концах. Всегда ли можно все 25 чисел округлить так, чтобы по-прежнему на каждом ребре стояла сумма чисел в его концах?

3. В 10 кошельках лежали монеты так, что веса любых двух монет из одного кошелька отличались не более чем на 1 г (веса монет могут быть нецелыми). Монеты смешали и положили в непрозрачный мешок. Саша про веса монет заранее ничего не знает. Он вынимает одну монету из мешка, взвешивает, затем кладет монету в одну из имеющихся 20 коробок, вынимает следующую монету и т.д. (Положив монету в коробку, потом её уже нельзя переложить). Докажите, что Саша может действовать так, чтобы в каждой коробке веса любых двух монет отличались не более чем на 1 г.

4. Даны 9 чисел a_1, a_2, ..., a_9. Известно, что не все числа $2a_1$, $2a_2$, ..., $2a_9$ — целые. Какое наибольшее число целых может быть среди попарных сумм $a_i + a_j$ ($i \neq j$)?

5. Надо сделать набор из пяти гирь, с помощью которых можно уравновесить любой целый вес от 5 г до 10 г (гири кладутся на одну чашку весов, измеряемый вес — на другую, веса гирь не обязательно целые). Одна гиря делается из золота, каждая из остальных не тяжелее золотой. Каким наименьшим количеством золота можно обойтись?

6. Шесть команд в однокруговом турнире набрали 10, 7, 6, 6, 3 и 3 очка. Сколько очков начислялось за победу, если за ничью давали 1 очко, а за поражение 0?

7. В клетки прямоугольной таблицы вписаны числа. Выписаны также суммы для каждой строки, для каждого столбца и для всей таблицы. Все эти суммы оказались целыми. Докажите, что все числа в таблице можно округлить так, чтобы все суммы по-прежнему сходились.

Зачетные задачи

1. Вес каждой гирьки набора — нецелое число грамм. Ими можно уравновесить любой целый вес от 1 г до 40 г (гири кладутся на одну чашку весов, измеряемый вес — на другую). Каково наименьшее число гирь в таком наборе?

2. Алёна и Боря независимо друг от друга складывают одни и те же n чисел в одном порядке. На каждом шаге (написав первое число, прибавив второе и т. д.) они делают следующее. Если дробная часть полученной суммы меньше 0,5, то Алёна округляет до ближайшего меньшего целого, а Боря не округляет. Если же дробная часть больше или равна 0,5, то Боря округляет до ближайшего большего целого, а Алёна не округляет. Какова наибольшая возможная разность между результатами Бори и Алёны?

3. Банкомат обменивает монеты: дублоны на пиастры и наоборот. Пиастр стоит s дублонов, а дублон — $1/s$ пиастров, где s — не обязательно целое. В банкомат можно вбросить любое число монет одного вида, после чего он выдаст в обмен монеты другого вида, округляя результат до ближайшего целого числа (если ближайших чисел два, выбирается большее). Пират Петер поменял все свои дублоны на пиастры, затем эти пиастры — на дублоны. В результате у него стало больше дублонов. Тогда он повторил операцию «дублоны–пиастры–дублоны», снова меняя все деньги. Могло ли у него стать ещё больше дублонов?

5. Имеется набор из 20 гирь, с помощью которых можно взвесить любой целый вес от 1 г до 1997 г (гири кладутся на одну чашку весов, измеряемый вес — на другую). Каков минимально возможный вес самой тяжелой гири такого набора?

source:combinatorics/rounding-g9/r2.tex

Запусти процесс

Запустив процесс, можно «по цепочке» распространить свойство.

1. В последовательности чисел каждый член (кроме первого) на 18 больше суммы двух своих соседей. 20-й член равен 20,18. Докажите, что в последовательности никакие два соседних члена не являются оба целыми числами.

Получить искомую конструкцию можно методом последовательных улучшений. Например, увеличивая на каждом шаге число деталей, поставленных на место.

2. (a) Есть несколько кусков сыра, каждый — не тяжелее 100 г. Докажите, что их все можно разложить на две кучки так, чтобы веса кучек отличались не более чем на 100 г.
   (b) Есть 20 камней неизвестного веса и двухчашечные весы без гирь. Докажите, что сделав не более 19 взвешиваний, можно все камни можно разложить на две кучки так, чтобы веса кучек отличались не более чем на вес самого тяжелого камня.

Запускаясь, надо понимать, какие промежуточные ситуации получаются в процессе, и как делать очередной шаг в разных ситуациях.

3. Ученики школы посещают кружки. Докажите, что можно несколько школьников принять в пионеры так, чтобы в каждом кружке был хотя бы один пионер и для любого пионера нашелся кружок, в котором он был бы единственным пионером.

4. Среди 50 школьников каждый знаком не менее чем с 25 другими. Докажите, что можно их разбить на группы из 2 или 3 человек так, чтобы каждый был знаком со всеми в своей группе.

При сборке детали не обязательно добавлять по одной. Можно соединять и куски из нескольких деталей, уменьшая общее число кусков.

5. На кольцевой дороге стоят несколько одинаковых автомобилей. Известно, что общего количества бензина в них достаточно на полный круг по кольцу. Докажите, что найдется автомобиль, который сможет проехать полный круг, забирая бензин у других автомобилей по мере проезда мимо них.

Делая очередной шаг, думайте не только о конечной цели, но и о возможности для следующего шага.

6. Есть 100 конфет 5 сортов, каждого сорта не более 50 штук. Докажите, что конфеты можно разбить на 50 пар так, чтобы в каждой паре конфеты были разного сорта.

7. На окружности отмечено 300 точек: по 100 точек синего, красного и зелёного цветов. Докажите, что можно провести 150 отрезков с концами в этих точках, соблюдая такие правила: (1) никакие два отрезка не пересекаются (даже в концах); (2) концы каждого отрезка — разного цвета.

Свяжите с конструкцией величину, меняющийся в одну сторону при улучшениях *(полуинвариант).* Если полуинваринт нельзя менять бесконечно, то его крайнее значение даст искомый результат *(принцип крайнего)*, или докажет, что исходная конструкция невозможна *(бесконечный спуск)*.

8. На олимпиаде у каждого участника не более 25 знакомых. Докажите, что можно рассадить всех участников по трём аудиториям так, чтобы у каждого в его аудитории было не более 8 знакомых.

9.* На координатной плоскости лежит правильный пятиугольник. Докажите, что хотя бы у одной из его вершин есть не целая координата.

Зачетные задачи

1. На клетках доски 10×10 лежит по алмазу так, что на соседних по стороне клетках веса различны. Докажите, что алмазы можно переложить на клетки доски 2×50 так, чтобы по-прежнему веса на соседних клетках были различны.

2. На окружности расставлено несколько положительных чисел, каждое из которых не больше 1. Докажите, что можно разделить окружность на три дуги так, что суммы чисел на соседних дугах будут отличаться не больше чем на 1. (Если на дуге нет чисел, то сумма на ней считается равной нулю.)

3. Натуральное число кратно 4. Все его делители выписали в строку в порядке возрастания. Докажите, что в этой строке найдется пара соседей с разностью 2.

4. Шайка разбойников отобрала у купца мешок монет. Каждая монета стоит целое число грошей. Оказалось, что какую бы монету ни отложить, оставшуюся сумму можно разделить между разбойниками поровну. Докажите, что если отложить одну монету, то число монет разделится на число разбойников.

source:combinatorics/process-g9-launch/r2.tex

Непрерывная комбинаторика: точки на отрезке и окружности

В некоторых задачах возникают комбинации из конечного числа объектов, но сами объекты выбираются из бесконечного набора, заданного непрерывным параметром или параметрами. Хорошей моделью в таких задачах служат наборы точек на прямой и окружности; работает обобщенный принцип Дирихле.

1. (a) Из нескольких палочек надо сложить три отрезка одинаковой длины. Перед этим несколько раз можно распилить любую палочку или кусок на две части. Каким наименьшим числом распилов можно гарантированно обойтись?
   (b) Несколько кусков сыра требуется разложить на 7 кучек одинакового веса, разрезав предварительно несколько кусков на части. Каким наименьшим количеством разрезов можно гарантированно обойтись? (При любом разрезе один кусок распадается на два).

2. Хозяйка испекла для гостей пирог.
   (a) За столом может оказаться либо p человек, либо q. Как заранее разрезать пирог не более чем на $p + q - 1$ кусков (не обязательно равных), чтобы в любом случае его можно было раздать поровну?
   (b) Каково минимальное число кусков при $p = 4$, $q = 6$?

3. Есть 11 гирь, каждая весит меньше 100 г.
   (a) Докажите, что веса каких-то двух гирь отличаются меньше, чем на 10 г.
   (b) Выписаны по разу веса всевозможных пар из этих гирь. Докажите, что какие-то два веса отличаются менее чем на 4 г.
   (c) Известно, что каждая гиря отличается по весу более чем на 4 г от любой другой гири. Докажите, что можно выбрать 4 гири и разложить их на две пары так, чтобы веса пар отличались меньше, чем на 4 г.

4. (a) *Лемма о кратной подсумме.* В ряд выписали n целых чисел. Докажите, что в это ряду можно подчеркнуть одно или несколько подряд идущих чисел так, чтобы их сумма делилась на n.
   (b) В ряд выписаны действительные числа $a_1, a_2, a_3, ..., a_{1000}$. Докажите, что можно выделить одно или несколько стоящих рядом чисел так, что их сумма будет отличаться от целого числа меньше, чем на 0,001.

С группами точек можно поступать как с одним целым: переворачивать, сдвигать, сжимать или растягивать. Удачно выбранная операция помогает решить задачу.

5. (a) Сколько целых чисел может лежать на отрезке числовой оси длины b?
   (b) Сколько целых чисел может лежать на интервале числовой оси длины b?
   (c) Даны два интервала одинаковой длины. На сколько могут отличаться количества целых точек на этих интервалах?
   (d) Известно, что число a положительно, а неравенство $1 < xa < 2$ имеет ровно 3 решения в целых числах. Сколько решений в целых числах может иметь неравенство $2 <$

$xa < 3$?

Полезно помнить, что на любом, сколь угодно малом, интервале найдется рациональное число.

6. Даны 100 различных чисел. Докажите, что
   (a) можно выбрать такое не равное им рациональное число q, чтобы оно было меньше ровно 75 из этих чисел;
   (b) можно умножить все числа на одно и то же рациональное число так, чтобы ровно половина из них стала больше 1000.

7. (a) Даны 3 пары положительных чисел: $a_1 < b_1$, $a_2 < b_2$, $a_3 < b_3$. Числа в каждой паре разрешается увеличить в целое число раз, для каждой пары в своё. Докажите, что можно добиться, чтобы все a_i стали меньше всех b_j.
   (b) Есть сто картинок, на каждой — взрослый и ребенок ростом поменьше (все двести человек на картинках разные). Из них надо собрать одну большую картину. При этом разрешается уменьшать видимый рост людей в целое число раз: эти целые числа могут быть разными для людей с разных картинок и должны быть одинаковыми для людей с одной картинки. Докажите, что можно добиться, чтобы на большой картине каждый взрослый имел рост больше каждого ребенка.

Зачетные задачи

1. В ряд выписаны 11 чисел. Назовем *сегментом* одно или несколько подряд идущих чисел. Докажите, что найдутся два сегмента (возможно пересекающихся), оба с суммами, кратными 10.

2. **(a)** Есть 10 яблок весом от 50 г до 100 г. Докажите, что из них можно можно выбрать два непересекающихся набора, чьи веса отличаются менее чем на 1 г.
(b) То же, но в наборах должно быть одинаковое число яблок.

3. Купившему головку сыра весом 3 кг магазин предлагает призовую игру. Покупатель режет головку на 4 куска, а продавец выбирает из этих кусков один или несколько и раскладывает их на одну или на обе чаши весов. При неравновесии продавец обязан за счет магазина добавить призовой кусок сыра, уравновешивающий чаши. Продавец старается сделать приз поменьше, а покупатель — побольше. Найдите вес призового куска при наилучших действиях сторон.

5. У Пети было 20 камней нецелого веса, выложенных по кругу. Для каждого камня Петя сделал взвешивание, положив этот камень на одну чашу весов, а пару его соседей — на другую чашу, и записал результат: тяжелее этот камень или легче (равенства ни разу не случилось). Докажите, что Вася может подменить все камни на камни целого веса так, чтобы такая же проверка дала точно те же результаты.

source:combinatorics/discrete-continuity-g9-points/r2.tex

Непрерывная комбинаторика: порядок и оценки

В некоторых задачах возникают комбинации из конечного числа объектов нецелого веса. Важным приемом является упорядочение объектов.

1. Есть несколько камней, выложенных в порядке возрастания весов. За какое наименьшее число взвешиваний на чашечных весах без гирь можно проверить или опровергнуть утверждение: Любые два камня вместе тяжелее одного?

2. Сборные Перу и Чили (по N игроков в каждой) намерены сыграть серию матчей по борьбе, где более сильный игрок всегда побеждает более слабого. Для каждого матча организуется 10 пар: перуанец против чилийца, в каждой паре побеждает один из соперников, счет в матче — по числу побед. Организаторам известны сравнительные силы игроков внутри каждой из команд, но не между игроками из разных стран. Они собирается устраивать матчи до тех пор, пока какой-нибудь матч не закончится вничью (или пока не выяснится, что ничейный матч невозможен). Каким наименьшим числом матчей они всегда могут обойтись? Решите задачу для
(a) $N = 2$; (b) $N = 4$; (c) $N = 10$.

3. (a) Имеются 300 яблок, любые два из которых различаются по весу не более чем в два раза. Докажите, что их можно разложить в пакеты по два яблока так, чтобы любые два пакета различались по весу не более чем в полтора раза.
(b) Имеются 300 яблок, любые два из которых различаются по весу не более чем в три раза. Докажите, что их можно разложить в пакеты по четыре яблока так, чтобы любые два пакета различались по весу не более чем в полтора раза.

4. Есть 1000 яблок, которые надо разложить в 10 пакетов по 100 яблок в каждом. Оказалось, что при любой такой раскладке найдутся хотя бы два пакета одинакового веса. Докажите, что
(a) есть по крайней мере 200 яблок одинакового веса;
(b) есть раскладка, когда по крайней мере 3 пакета весят одинаково.

Разбиения с небольшой разницей

5. *Лемма о цене игры.* На столе лежат несколько кусков шоколада, самый большой весит b. Петя начинает, и они с Васей по очереди съедают по куску, пока не съедят всё. Докажите, что при наилучших действиях Васи Петя сможет съесть
(a) не меньше Васи;
(b) не более чем на b больше Васи.

6. *Лемма о способах выбора.* Есть $2n$ кусков сыра. Докажите, что можно не менее чем $2n$ способами разложить их по n штук на две чаши весов так, чтобы разность весов чаш была не больше веса самого тяжелого куска.

7. В 31 ящике лежит смесь апельсинов и бананов. Докажите, что можно так выбрать 16 ящиков, что в них окажется по весу не менее половины всех апельсинов и не менее половины всех бананов.

Зачетные задачи

1. В 31 ящике лежит смесь апельсинов и бананов. Докажите, что можно так выбрать 11 ящиков, что в них окажется по весу не менее трети всех апельсинов и не менее трети всех бананов.

2. Есть 20 фруктов. Назовем натуральное число $k < 20$ *хорошим*, если найдется k фруктов, чей вес равен ровно половине общего веса. Каково наибольшее возможное количество хороших чисел?

3. Есть 1000 яблок, которые надо разложить в 10 пакетов по 100 яблок в каждом. Оказалось, что при любой такой раскладке найдутся хотя бы два пакета одинакового веса. Докажите, есть раскладка, когда по крайней мере 8 пакетов весят одинаково.

source:combinatorics/discrete-continuity-g9-ordering/r2.tex

Глава 3

Во́роны (10-1)

Гармонический разнобой

1. Через точку A проводятся всевозможные секущие, пересекающие окружность в точках B и C. Найдите геометрическое место точек пересечения касательных к окружности, проведенных в точках B и C.

2. Пусть $ABCD$ — гармонический четырехугольник, P — некоторая точка. Прямые PA, PB, PC и PD повторно пересекают окружность, описанную около четырехугольника $ABCD$, в точках A', B', C' и D' соответственно. Докажите, что четырехугольник $A'B'C'D'$ гармонический.

3. Дан гармонический четырехугольник $ABCD$ и прямая ℓ, параллельная касательной, проведенной в точке A к его описанной окружности. Прямые AB, AC и AD пересекают прямую ℓ в точках B', C' и D' соответственно. Докажите, что C' — середина отрезка $B'D'$.

4. В окружности S проведены две параллельные хорды AB и CD. Прямая, проведенная через C и середину AB, вторично пересекает окружность в точке E. Точка K — середина отрезка DE. Докажите, что $\angle AKE = \angle BKE$.

5. Дана окружность с центром O и диаметром BC. Из точки A на окружности опускается перпендикуляр AH на BC и берется его середина M. Прямая BM повторно пересекает окружность в точке N. Касательная в точке N к окружности пересекает AC в точке P. Найдите геометрическое место точек P, когда точка A двигается по окружности.

6. Точка O — центр описанной окружности ω треугольника ABC, а M — середина стороны BC. Точки E на AC и F на AB таковы, что $ME = MF$. Окружность, описанная около треугольника AEF, пересекает повторно ω в точке P, отрезок AU — ее диаметр. Докажите, что четырехугольник $PEUF$ гармонический.

7. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается стороны AC в точке D. Отрезок BD повторно пересекает окружность в точке E. Точки F и G на окружности таковы, что $FE \parallel BC$ и $GE \parallel BA$. Докажите, что прямая, соединяющая центры вписанных окружностей треугольников DEF и DEG, перпендикулярна биссектрисе угла B.

8. В остроугольном треугольнике ABC высоты BF и CE пересекаются в ортоцентре H, а точка M — середина стороны BC. Пусть точка X на прямой EF такова, что $\angle XMH = \angle HAM$, причем точки A и X лежат по разные стороны от MH. Докажите, что AH делит MX пополам.

9. Вписанная окружность треугольника ABC касается сторон BC, CA и AB в точках D, E и F соответственно. Отрезки BE и CF повторно пересекают вписанную окружность в точках M и N соответственно. На продолжении MD за точку D выбрана точка P такая, что $DP = 2MD$. Докажите, что прямая DE касается окружности, описанной около треугольника DPN.

Глава 4

Скворцы (10-2)

Гармоничное

Определение. Вписанный четырехугольник $ABCD$ называется гармоническим, если $AB \cdot CD = AD \cdot BC$.

1. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Докажите, что касательные к окружности в точках B и D пересекаются на прямой AC тогда и только тогда, когда $ABCD$ гармонический.

2. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность, M — середина диагонали AC. Докажите, что $\angle AMB = \angle ADC$ тогда и только тогда, когда $ABCD$ гармонический.

3. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность, M — середина диагонали AC. Докажите, что $\angle AMB = \angle DCB$ тогда и только тогда, когда $ABCD$ гармонический.

4. Докажите, что вписанный четырехугольник является гармоническим тогда и только тогда, когда диагональ AC является симедианой треугольника ABD.

5. Через точку A проводятся всевозможные секущие, пересекающие окружность в точках B и C. Найдите геометрическое место точек пересечения касательных к окружности, проведенных в точках B и C.

6. Пусть $ABCD$ — гармонический четырехугольник, P — некоторая точка. Прямые PA, PB, PC и PD повторно пересекают окружность, описанную около четырехугольника $ABCD$, в точках A', B', C' и D' соответственно. Докажите, что четырехугольник $A'B'C'D'$ гармонический.

7. Дан гармонический четырехугольник $ABCD$ и прямая ℓ, параллельная касательной, проведенной в точке A к его описанной окружности. Прямые AB, AC и AD пересекают прямую ℓ в точках B', C' и D' соответственно. Докажите, что C' — середина отрезка $B'D'$.

8. В окружности S проведены две параллельные хорды AB и CD. Прямая, проведенная через C и середину AB, вторично пересекает окружность в точке E. Точка K — середина отрезка DE. Докажите, что $\angle AKE = \angle BKE$.

9. Дана окружность с центром O и диаметром BC. Из точки A на окружности опускается перпендикуляр AH на BC и берется его середина M. Прямая BM повторно пересекает окружность в точке N. Касательная в точке N к окружности пересекает AC в точке P. Найдите геометрическое место точек P, когда точка A двигается по окружности.

10. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается стороны AC в точке D. Отрезок BD повторно пересекает окружность в точке E. Точки F и G на окружности таковы, что $FE \parallel BC$ и $GE \parallel BA$. Докажите, что прямая, соединяющая центры вписанных окружностей треугольников DEF и DEG, перпендикулярна биссектрисе угла B.

11. Точка O — центр описанной окружности ω треугольника ABC, а M — середина стороны BC. Точки E на AC и F на AB таковы, что $ME = MF$. Окружность, описанная около треугольника AEF, пересекает повторно ω в точке P, отрезок AU — ее диаметр. Докажите, что четырехугольник $PEUF$ гармонический.

source:geometry/harmonic-quadrilateral-g10/r2.tex

Глава 5

Пеликаны (11-1)

Глава 6

Цапли (11-2)

Глава 7

Куры (X)

Ближневосточный разнобой

1. К двум пересекающимся окружностям ω_1 и ω_2 проведены общие внешние касательные AB и CD так, что $A, C \in \omega_1$ и $B, D \in \omega_2$. Касательные к окружностям, проходящие через середину M отрезка AB и отличные от AB, пересекают прямую CD в точках K и L. Докажите, что центр вписанной окружности треугольника MKL равноудален от точек C и D.

2. Пусть H — ортоцентр остроугольного треугольника ABC, а ω — окружность девяти точек. На дуге BHC окружности Ω с центром O' выбрана точка X. Отрезок AX пересекает окружность ω в точке Y. Точка P на окружности ω такова, что $PX = PY$. Докажите, что $\angle O'PX = 90°$.

3. Высоты BE и CF остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. Точка P на EF такова, что $HO \perp HP$ (O — центр описанной окружности треугольника ABC), а точка Q на AH такова, что $HM \perp PQ$ (M — середина BC). Докажите, что $QA = 3QH$.

4. В треугольнике ABC точка M — середина BC. Пусть ω — окружность, лежащая внутри треугольника ABC, касающаяся сторон AB и AC в точках E и F соответственно. Из точки M проведены касательные MP и MQ к ω так, что точки P и B лежат по одну сторону от прямой AM. Пусть $X = PM \cap BF$ и $Y = QM \cap CE$. Докажите, что если $2PM = BC$, то прямая XY касается ω.

5. Биссектриса угла A треугольника ABC пересекает высоты BE и CF в точках M и N соответственно. Докажите, что перпендикуляры из M на EF и из N на BC, а также медиана из вершины A пересекаются в одной точке.

6. Точки P на описанной окружности ω и Q на основании BC равнобедренного треугольника ABC таковы, что $AP = AQ$. При этом прямые AP и BC пересекаются в точке R. Докажите, что касательные из точек B и C к вписанной окружности треугольника AQR, отличные от BC, пересекаются на ω.

7. Треугольник ABC таков, что $\angle ABC < \angle BCA < \angle CAB < 90°$. Точка O — центр его описанной окружности, а точка K симметрична O относительно BC. Точки D и E — основания перпендикуляров из точки K на прямые AB и AC, соответственно. Прямая DE пересекает BC в точке P, а окружность ω с диаметром AK пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке Q, отличной от A. Докажите, что PQ пересекает серединный перпендикуляр к BC в точке на окружности ω.

8. Точка H' симметрична основанию высоты AH треугольника ABC относительно середины стороны BC. Касательные к описанной окружности треугольника ABC в точках B и C пересекаются в точке X. Прямая, проходящая через H' и перпендикулярная XH' пересекает прямые AB и AC в точках Y и Z соответственно. Докажите, что $\angle YXB = \angle ZXC$.

source:geometry/mixture-gX-middle-east.tex

Разнобой для жителей крайнего севера

1. Четырехугольник $ABCD$ описан около окружности с центром в точке O. Прямые AB и CD пересекаются в точке P, а прямые AD и BC — в точке Q, причем отрезки BP и DQ пересекаются в точке A; M — основание перпендикуляра, опущенного из точки O на PQ. Докажите, что

(a) точка пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$ лежит на прямой OM;

(b) $\angle BMO = \angle DMO$.

2. Вписанная окружность треугольника ABC с центром I касается сторон AC и AB в точках E и F. Точка J на EF такова, что прямая BJ параллельна AC. Пусть $CJ \cap AB = K$. Докажите, что прямая IK параллельна EF.

3. Вписанная окружность треугольника ABC с центром I касается стороны AC в точке Q; точка E — середина стороны AC, а K — ортоцентр треугольника BIC. Докажите, что прямая $KQ \perp IE$.

4. Дан треугольник ABC и его описанная окружность ω. Точки A_1, B_1 и C_1 на прямых BC, CA и AB соответственно таковы, что B_1 и C_1 лежат на поляре точки A_1 относительно ω. Докажите, что C_1 лежит на поляре точки B_1 относительно ω.

5. Вписанная окружность треугольника ABC с центром I касается сторон AC и AB в точках E и F. Прямая ℓ проходит через вершину C и пересекает AB и EF в точках M и N соответственно. Прямая ME пересекает CF в точке J. Докажите, что $AJ \perp IN$.

6. Высоты AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке H. Точка M — середина BC. Пусть T — точка пересечения прямых B_1C_1 и HM. Докажите, что прямая TA_1 проходит через точку пересечения касательных к описанной окружности треугольника ABC в точках B и C.

7. Точки R и Q получаются из точки P симметрией относительно сторон AB и AC треугольника ABC соответственно. Пусть $RQ \cap BC = T$. Докажите, что $\angle APB = \angle APC$ тогда и только тогда, когда $\angle APT = 90°$.

8. Пусть I и H — центр вписанной окружности и ортоцентр треугольника ABC. Точка P на BC такова, что $PI \perp AI$, M — середина AP. Окружность с диаметром IM пересекает вписанную в треугольник ABC окружность в точках U и V. Докажите, что точки U, V и H лежат на одной прямой.

source:geometry/polar-line-gX.tex

Дальневосточный разнобой

1. Точка A' диаметрально противоположна вершине A на описанной окружности треугольника ABC. На стороне BC во внешнюю сторону построен равносторонний треугольник BCD. Перпендикуляр к $A'D$, проведенный в точке A', пересекает прямые CA и AB в точках E и F соответственно. На отрезке EF построен равнобедренный треугольник ETF с $\angle ETF = 120°$ (точки A и T по разные стороны от EF). Докажите, что AT проходит через центр окружности девяти точек треугольника ABC.

2. Треугольник ABC с инцентром I вписан в окружность Γ. Точка M — середина стороны BC. Точки D, E и F выбраны на сторонах BC, CA и AB соответственно так, что $ID \perp BC$, $IE \perp AI$ и $IF \perp AI$. Предположим, что описанная окружность треугольника AEF повторно пересекает Γ в точке X. Докажите, что прямые XD и AM пересекаются на Γ.

3. В неравнобедренном треугольнике ABC точки D, F, и G — середины сторон AB, AC и BC соответственно. Окружность Γ проходит через C, касается AB в точке D и пересекает AF и BG в точках X и Y соответственно. Точки X' и Y' симметричны точкам X и Y относительно F и G соответственно. Прямая $X'Y'$ пересекает CD и FG в точках Q и M соответственно. Наконец, прямая CM повторно пересекает Γ в точке P. Докажите, что $CQ = QP$.

4. На сторонах AB, BC, CD и DA выпуклого четырехугольника $ABCD$ выбраны точки P, Q, R и S соответственно. Отрезки PR и QS пересекаются в точке O. Предположим, что четырехугольники $APOS$, $BQOP$, $CROQ$ и $DSOR$ являются описанными. Докажите, что прямые AC, PQ и RS пересекаются в одной точке или параллельны.

5. Окружность Γ проходит через вершину A треугольника ABC и пересекает стороны AB и AC в точках E и F соответственно, а описанную окружность треугольника ABC вторично в точке P. Докажите, что точка, симметричная P относительно EF, лежит на BC тогда и только тогда, когда Γ проходит через центр описанной окружности треугольника ABC.

6. В остроугольном треугольнике ABC точка O — центр описанной окружности, G — центр масс. Пусть D — середина стороны BC, E — точка на окружности с диаметром BC, лежащая внутри треугольника ABC, такая, что $AE \perp BC$. Пусть $F = EG \cap OD$ и точки K и L на прямой BC таковы, что $FK \parallel OB$ и $FL \parallel OC$. Кроме того, точка $M \in AB$ такова, что $MK \perp BC$ и точка $N \in AC$ такова, что $NL \perp BC$. Наконец, окружность ω касается отрезков OB и OC в точках B и C. Если вы дочитали условие до конца, то докажите, что описанная окружность треугольника AMN касается окружности ω.

7. Внутри треугольника ABC дана точка P. Предположим, что L, M и N — середины сторон BC, CA и AB соответственно и $PL : PM : PN = BC : CA : AB$. Продолжения AP, BP и CP пересекают описанную окружность треугольника ABC в точках D, E и F соответственно. Докажите, что центры описанных окружностей треугольников APF, APE, BPF, BPD, CPD, CPE лежат на одной окружности.

8. Вписанная окружность неравнобедренного треугольника ABC касается его сторон BC, AC, AB в точках D, E и F соответственно. Пусть точки L, M и N симметричны точкам D,

E и F соответственно относительно EF, FD и DE. Пусть $AL \cap BC = P$, $BM \cap CA = Q$ и $CN \cap AB = R$. Докажите, что точки P, Q и R коллинеарны.

source:geometry/mixture-gX-east-asia.tex

Приложение А

Анонсы лекций

Что такое математическая физика?

Пока ваши коллеги увлеченно решают задачи по *физике,* мы обсудим, что такое *математическая физика,* какие задачи появляются в математической физике и почему они очень интересны с точки зрения математики. Мы постараемся обсудить следующие вопросы:

1. Можно ли услышать форму барабана?
2. Как определить радиус Земли?
3. Как определить возраст Вселенной?
4. Какой формы должна быть пуля?
5. Можно ли сделать шапку-невидимку?

И может быть какие-то еще...

Их решение (кроме второй), конечно, далеко выходит за рамки школьной программы, однако ведь цель лекции не том, чтобы рассказать решения этих задач, а в том, чтобы обсудить сами задачи... ну и математическую физику.

`source:lection/Бахарев.tex`

Числа Пизо

Возможно, вы видели такую задачу: у числа $(1+\sqrt{2})^{1001}$ найти в уме первые пять цифр после запятой. Ответ — это ,00000..., то есть большая степень иррационального числа оказывается очень близкой к целому числу.

С помощью многочленов мы поймем, у каких еще иррациональных чисел все большие степени «почти целые», и поговорим про гипотезу Пизо-Виджаярагхавана.

source:lection/Митрофанов.tex

Рамсеевская теория зацеплений и реализуемость гиперграфов

Можно ли граф расположить на плоскости так, чтобы его ребра не пересекались и не самопересекались? Мы рассмотрим аналогичную задачу о реализуемости *гиперграфов* в трехмерном и четырехмерном пространствах. Теория гиперграфов — бурно развивающийся раздел математики, возникший на стыке комбинаторики, топологии и программирования.

Результаты о гиперграфах будут обсуждаться на элементарном языке систем точек. Мы разберем метод понижения размерности, который сделает доступным доказательства для четырехмерного пространства и пригодится Вам при решении олимпиадных задач. За счет этого для понимания лекции не требуется предварительных знаний по гиперграфам; достаточно начального знакомства со стереометрией. Решение следующей задачи поможет Вам оценить, будет ли лекция доступна для Вас.

Среди любых ли шести точек в пространстве можно выбрать пять точек O, A, B, C, D, для которых (двумерные) треугольники OAB и OBC имеют общую точку, отличную от O?

source:lection/Скопенков.tex

Доказательство без разглашения

При общении онлайн нам все время приходится сообщать свои секретные данные, например, пароли. А вдруг их кто-то перехватит? Цена может быть очень большой: если злоумышленник или нечестный банковский служащий получит доступ к нашему счету, то можно и всех сбережений лишиться!

Но, оказывается, клиент может доказать, что он — это он, не дав возможности другому скопировать это доказательство и затем выдать себя за него. И это можно показать на примерах задач, понятных даже школьнику.

source:lection/Шаповалов.tex